

# MODUL MATRIKS



**MATEMATIKA WAJIB**  
**KELAS 11 MIPA/IPS**

# M A T R I K S

## A. Mengenal Matriks

Matriks adalah kelompok bilangan yang disusun dalam suatu jajaran berbentuk persegi atau persegi panjang yang terdiri atas baris-baris atau kolom-kolom

Pada awalnya matriks dimaksudkan sebagai bentuk lain dari penulisan data-data sebuah tabel.

Sebagai contoh diberikan sebuah tabel ketidakhadiran tiga orang siswa pada belajar tambahan selama tiga hari (Senin, Selasa, Rabu), yakni sebagai berikut

|      | Senin | Selasa | Rabu |
|------|-------|--------|------|
| Amir | 3     | 2      | 1    |
| Budi | 2     | 0      | 5    |
| Wati | 2     | 1      | 1    |

Diubah menjadi matriks  $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Sehingga bentuk umum matriks dapat ditulis sebagai berikut :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Baris dari suatu matriks adalah elemen-elemen yang disusun mendatar

Kolom dari suatu matriks adalah elemen-elemen yang disusun tegak

Ordo atau ukuran dari suatu matriks A ditentukan oleh banyaknya baris (m baris) dan banyaknya kolom (n kolom) dan ditulis  $A_{m \times n}$

Terdapat beberapa jenis matriks, yaitu :

(1) Matriks baris yaitu matriks yang terdiri dari satu baris saja

Contoh :

$$A = [3 \quad 5 \quad -4 \quad 0] \quad \text{Matriksa A berordo } (1 \times 4)$$

$$B = [0 \quad 1 \quad 3] \quad \text{Matriksa B berordo } (1 \times 3)$$

(2) Matriks kolom yaitu matriks yang terdiri dari satu kolom saja

$$\text{Contoh : } B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \text{Matriksa B berordo } (3 \times 1)$$

- (3) Matriks persegi yaitu matriks yang banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom .

Contoh  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}$  . Matriks A berordo (3 x 3), atau matriks berordo 3

Pada matriks persegi terdapat diagonal utama yaitu elemen-elemen yang terletak pada garis hubung  $a_{1n}$  dan  $a_{nn}$  . Untuk matriks A di atas unsur-unsur diagonal utamanya adalah 2, -1, 6 Sedangkan diagonal samping adalah elemen-elemen yang terletak pada garis hubung  $a_{1n}$  dan  $a_{n1}$ . Pada matriks A di atas, unsur-unsur diagonal samping adalah 4, -1, 0

- (4) Matriks segitiga atas adalah matriks persegi dengan elemen-elemen yang berada di atas diagonal utama semuanya bernilai nol. Matriks segitiga bawah adalah matriks persegi dengan elemen-elemen yang berada dibawah diagonal utama semuanya bernilai nol.

Contoh  $A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & 6 \end{bmatrix}$  .  $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

Pada contoh di atas, A adalah matriks segitiga atas dan B adalah matriks segitiga bawah

- (5) Matriks diagonal adalah matriks persegi yang elemen-elemennya semuanya bernilai nol kecuali elemen-elemen pada diagonal utama.

Contoh  $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$  .

- (6) Matriks identitas adalah matriks diagonal yang elemen-elemen pada diagonal utama semuanya bernilai 1, matriks ini biasa dilambangkan dengan I

Contoh  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- (7) Matriks datar adalah matriks yang banyaknya baris lebih besar daripada banyaknya kolom sedangkan matriks tegak adalah matriks yang banyaknya kolom lebih besar daripada banyaknya baris

Contoh  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$  dan  $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 6 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

Pada contoh di atas, A adalah matriks datar dan B adalah matriks tegak

Transpos dari matriks  $A_{m \times n}$  adalah sebuah matriks  $A^t$  berordo  $n \times m$  yang didapat dengan cara mengubah elemen baris menjadi kolom atau sebaliknya.

Sebagai contoh matriks  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 6 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$  transpose-nya adalah  $A^t = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Jika suatu matriks sama dengan transposnya, maka dikatakan matriks itu simetris atau setangkup.

Selanjutnya matriks A dan B dikatakan sama ( $A = B$ ) jika dan hanya jika ordonya sama dan elemen-elemen yang seletak nilainya sama.

Sebagai contoh, terdapat empat matriks sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 9 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 6/3 & 0 \\ 5-8 & 3^2 \end{bmatrix}$$

Matriks A dan B tidak sama, walaupun ordonya dan unsur-unsurnya sama (tetapi tidak seletak)

Matriks A dan C sama, ditulis  $A = C$ , karena ordonya sama dan elemen-elemen yang seletak nilainya sama.

Berikut ini akan diuraikan beberapa contoh soal disertai uraian jawaban, untuk lebih memahami konsep-konsep dasar matriks

01. Diketahui matriks  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

- (a) Tentukanlah ordo matriks A
- (b) Sebutkan unsur-unsur matriks baris ke 1
- (c) Sebutkan unsur-unsur matriks kolom ke 2

Jawab

- (a) Matriks A berordo  $(2 \times 3)$
- (b) Unsur-unsur matriks baris ke-1 adalah 2, 3 dan 1
- (c) Unsur-unsur matriks kolom ke-2 adalah 3 dan 0

02. Tentukanlah transpose matriks  $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

Jawab

$$A^t = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

03. Diketahui matriks  $A = \begin{bmatrix} r & 7 \\ 2p-3 & 2r \end{bmatrix}$  dan  $B = \begin{bmatrix} 2q & p+3q \\ 5 & 2r \end{bmatrix}$ . Jika  $A = B$  maka tentukanlah nilai r

Jawab

$$A = B$$

$$\begin{bmatrix} r & 7 \\ 2p-3 & 2r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2q & p+3q \\ 5 & 2r \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Maka : } 2p-3 &= 5 \longrightarrow 2p = 8 \longrightarrow p = 4 \\ 7 &= p+3q \longrightarrow 7 = 4+3q \longrightarrow 3 = 3q \longrightarrow q = 1 \\ r &= 2q \longrightarrow r = 2(1) \longrightarrow r = 2 \end{aligned}$$

Jadi nilai  $r = 2$

04. Diketahui matriks  $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & b \\ 1 & 4 & d \\ 0 & 2b & 6c \end{bmatrix}$  dan  $B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 6 \\ 3c & d & 4d \end{bmatrix}$ . Jika  $A = B^t$  maka

tentukanlah elemen matriks A baris ke dua kolom ke 3

Jawab

$$A = B^t$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & b \\ 1 & 4 & d \\ 0 & 2b & 6c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 3c \\ 1 & 4 & d \\ 0 & 6 & 4d \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Maka : } 2b &= 6 \longrightarrow b = 3 \\ b &= 3c \longrightarrow 3 = 3c \longrightarrow c = 1 \\ 6c &= 4d \longrightarrow 6(1) = 4d \longrightarrow d = 6/4 = 3/2 \end{aligned}$$

Jadi nilai elemen matriks A baris ke dua kolom ke 3 adalah  $d = 3/2$

## **SOAL LATIHAN 01**

### **A. Mengenal Matriks**

01. Matriks koefisien dari suatu sistem persamaan linier  $y = \frac{1}{2}x - 3$  dan  $3x + 5 = 4y$

adalah ...

A.  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

B.  $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$

C.  $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

D.  $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

E.  $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

02. Transpos matriks  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$  adalah  $A^t = \dots$

A.  $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

B.  $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

C.  $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

D.  $\begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

E.  $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

03. Diketahui  $A = \begin{bmatrix} x & -1 \\ z & 2y \end{bmatrix}$  dan  $B = \begin{bmatrix} y-z & -1 \\ y & 8 \end{bmatrix}$  Jika  $A = B$  maka nilai  $x + y + z = \dots$

A. 6

B. 7

C. 8

D. 9

E. 10

04. Diketahui matriks  $A = \begin{bmatrix} x+1 & x+2y \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$  dan matriks  $B = \begin{bmatrix} 3 & z \\ 0 & 3x-y \end{bmatrix}$ . Jika  $A = B$  maka nilai dari  $x.y.z = \dots$

A. -4

B. 4

C. 6

D. 7

E. 12

05. Diketahui matriks  $P = \begin{bmatrix} x+y & 1 \\ 2x-y & 0 \end{bmatrix}$  dan matriks  $Q = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ . Jika  $P = Q^t$ , maka nilai dari  $x.y = \dots$

A. 6

B. 9

C. 12

D. 15

E. 18

06. Diketahui matriks  $A = \begin{bmatrix} -2b & 2a+4 \\ 2a+c & 2 \end{bmatrix}$  dan matriks  $B = \begin{bmatrix} a+c & 2a-3b \\ 6 & 2a \end{bmatrix}$ . Jika  $A^t = B$  maka nilai  $a + b + c = \dots$

A. -1

B. 1

C. -2/3

D. 2

E. 5

07. Jika  $P = \begin{bmatrix} 3 & 2 & a \\ 5 & 4 & b \\ 8 & 6c & 11 \end{bmatrix}$  dan  $Q = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 2 & 4 & 4b \\ 6 & 2a & 11 \end{bmatrix}$ . Serta berlaku  $P^t = Q$  maka nilai  $c = \dots$
- A. -3  
D. 10  
B. 4  
E. 12  
C. 8
08. Jika  $A = \begin{bmatrix} a & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 6 \\ c & 3c & 11 \end{bmatrix}$  dan  $B = \begin{bmatrix} b/2 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 2a \\ c & 4b & 11 \end{bmatrix}$  serta berlaku  $A = B$  maka elemen baris ke 3 kolom ke 2 adalah ...
- A. 2  
D. 5  
B. 3  
E. 6  
C. 4
09. Jika  $\begin{bmatrix} a+2 & b \\ 2a-b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & a-1 \\ c & -c \end{bmatrix}$  maka nilai  $d = \dots$
- A. -2  
D. 1  
B. -1  
E. 2  
C. 0
10. Diketahui  $C = \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}$  dan  $D = \begin{bmatrix} 2a & 12 \\ 3b & 36 \end{bmatrix}$ . Jika  $12C = 4D^t$  maka nilai  $a + b = \dots$
- A. 3  
D. 12  
B. 6  
E. 15  
C. 9
11. Diketahui matriks  $A = \begin{bmatrix} x+5 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$  dan matriks  $B = \begin{bmatrix} 2 & 1-y \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}$ . Jika  $A = 2B^t$  maka nilai  $x + y =$
- A. -4  
D. 4  
B. 0  
E. 8  
C. 2
12. Jika  $A = \begin{bmatrix} a & 4 \\ 2b & 3c \end{bmatrix}$  dan  $B = \begin{bmatrix} 2c-3b & a \\ 2a+1 & b+7 \end{bmatrix}$  memenuhi  $A = 2B$ , maka determinan matriks A sama dengan
- A. -16  
D. 16  
B. 8  
E. 0  
C. -8
13. Diketahui  $A = \begin{bmatrix} x+y & x \\ y & x-y \end{bmatrix}$  dan  $B = \begin{bmatrix} 1 & -x/2 \\ -2y & 3 \end{bmatrix}$ . Jika  $A^t$  menyatakan transpose dari A, maka persamaan  $A^t = B$  dipenuhi bilai  $x = \dots$
- A. 2  
D. -1  
B. 1  
E. -2  
C. 0

# M A T R I K S

## B. Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Terdapat beberapa operasi aljabar yang dapat dilakukan pada matriks, diantaranya adalah penjumlahan dan pengurangan. Namun dua matriks dapat dijumlah/dikurang jika kedua matriks itu ordonya sama.

Misalkan A dan B adalah dua matriks yang ordonya sama serta  $A + B = C$ , maka C adalah matriks hasil yang didapat dengan cara menjumlahkan elemen-elemen yang seletak pada A dan B.

$$\text{Contoh : } \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 6 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+3 & 0+4 \\ -2+5 & 6+6 \\ 3+(-3) & 1+(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 12 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Matriks nol adalah matriks yang semua elemennya nol (dilambangkan dengan O).

Matriks ini adalah matriks identitas penjumlahan, sehingga  $A + 0 = 0 + A = A$

Contoh

Diketahui  $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ , maka matriks identitas dari A adalah  $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ , sehingga

$$A + O = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+0 & 4+0 \\ -5+0 & 1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = A$$

Jika A suatu matriks, maka matriks lawan dari A adalah matriks  $-A$  yakni sebuah matriks yang unsur-unsurnya merupakan lawan dari unsur-unsur matriks A. Dalam hal ini berlaku sifat  $A + (-A) = O$ .

Contoh

Diketahui  $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$ , maka lawan dari matriks A adalah  $-A = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ , sehingga

$$A + (-A) = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+(-3) & 4+(-4) \\ -5+(5) & 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

Perkalian suatu bilangan real k dengan matriks A adalah suatu matriks kA yang didapat dengan cara mengalikan setiap unsur matriks A dengan k

Contoh

$$\text{Diketahui } A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}, \text{ maka } 2A = 2 \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ -10 & 0 \end{bmatrix}$$

Misalkan A, B dan C adalah matriks-matriks yang ordonya sama, dan k adalah bilangan real, maka terdapat sifat-sifat yang berlaku pada penjumlahan dan pengurangan matriks

1.  $A + B = B + A$
2.  $(A + B) + C = A + (B + C)$
3.  $k(A + B) = kA + kB$
4.  $kA + mA = (k + m)A$

Untuk pemahaman lebih lanjut akan diberikan beberapa contoh soal serta uraian jawabannya.

01. Diketahui matriks  $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$  dan  $C = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$  maka

tentukanlah hasil dari

- (a)  $A + B - C$
- (b)  $A - (B + C)$
- (c)  $(A - B) - (A - C) + (B + C)$

Jawab

$$\begin{aligned}
 \text{(a) } A + B - C &= \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -2 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 2+0-(-3) & -5+4-4 \\ 3+(-2)-2 & -1+(-6)-(-2) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(b) } A - (B + C) &= \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} - \left( \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -2 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0+(-3) & 4+4 \\ -2+2 & -6+(-2) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 8 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 2-(-3) & -5-8 \\ 3-0 & -1-(-8) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 5 & -13 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(c) } (A - B) - (A - C) + (B + C) &= A - B - A + C + B + C \\
 &= 2C \\
 &= 2 \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 8 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

02. Tentukan hasil dari

$$(a) \ 4 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(b) \ 3 \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Jawab

$$\begin{aligned} (a) \quad & 4 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ -12 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 8+2-(-4) & 4+(-1)-6 \\ -12+0-0 & 0+4-(-2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 14 & -3 \\ -12 & 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) \quad & 3 \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -15 & 6 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 8 & -6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -15-(-6)-2 & 6-1-(-2) \\ 3-2-8 & 0-(-3)-(-6) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -11 & 7 \\ -7 & 9 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

03. Tentukanlah matriks X jika :

$$(a) \ 3X - 2 \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6 & 20 \\ -12 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(b) \ 4X + 2 \begin{bmatrix} 3 & 0 & -5 \\ -2 & -4 & 1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} + 2X$$

Jawab

$$\begin{aligned} (a) \quad & 3X - 2 \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6 & 20 \\ -12 & 2 \end{bmatrix} \\ & 3X - \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 12 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ -6 & 1 \end{bmatrix} \\ & 3X = \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ -6 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 12 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$3X = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(b) \quad 4X + 2 \begin{bmatrix} 3 & 0 & -5 \\ -2 & -4 & 1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} + 2X$$

$$4X + \begin{bmatrix} 6 & 0 & -10 \\ -4 & -8 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12 & -6 & 9 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} + 2X$$

$$4X + \begin{bmatrix} -6 & 6 & -19 \\ -4 & -11 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} + 2X$$

$$4X - 2X = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 & 6 & -19 \\ -4 & -11 & -4 \end{bmatrix}$$

$$2X = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 20 \\ 2 & 14 & 4 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 10 & 0 & 20 \\ 2 & 14 & 4 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 1 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

04. Tentukanlah nilai x, y dan z jika  $\begin{bmatrix} x & 4 \\ 3x & 6 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6y & 10 \\ 4 & 2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+4x & 9 \\ 8 & 2y \end{bmatrix}$

Jawab

$$\begin{bmatrix} x & 4 \\ 3x & 6 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6y & 10 \\ 4 & 2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+4x & 9 \\ 8 & 2y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & 4 \\ 3x & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3y & 5 \\ 2 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+4x & 9 \\ 8 & 2y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x+3y & 9 \\ 3x+2 & 6+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+4x & 9 \\ 8 & 2y \end{bmatrix}$$

Maka  $3x+2=8$   
 $3x=6$   
 $x=2$

$$x+3y=3+4x$$

$$x-4x=3-3y$$

$$-2x=3-3y$$

$$-2(3)=3-3y$$

$$-6=3-3y$$

$$3y=3+6$$

$$3y=9 \text{ maka } y=3$$

$$6+z=2y$$

$$6+z=2(3)$$

$$6+z=6$$

$$z=6-6$$

$$z=0$$

## **SOAL LATIHAN 02**

### **B. Penjumlahan dan Pengurangan Matriks**

01. Diketahui  $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$  dan  $C = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ , maka  $A - (B - C) = \dots$

A.  $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

B.  $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

C.  $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

D.  $\begin{bmatrix} -9 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

E.  $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

02. Jika  $A + \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ , maka matriks A adalah ....

A.  $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

B.  $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$

C.  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

D.  $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

E.  $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

03. Jika  $\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -7 \end{bmatrix} - A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ , maka matriks A adalah ...

A.  $\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

B.  $\begin{bmatrix} -6 & 5 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

C.  $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

D.  $\begin{bmatrix} 2 & -8 \\ 10 & 6 \end{bmatrix}$

E.  $\begin{bmatrix} 2 & -8 \\ 3 & -12 \end{bmatrix}$

04. Nilai  $x, y, z$  yang memenuhi persamaan matriks  $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ x & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z & y \\ x & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$  adalah ...

A. 24

B. 10

C. 12

D. 16

E. 20

05. Jika  $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$  dan  $C = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  maka hasil dari  $(A+B) - (A-C) + (C-B)$

sama dengan ....

A.  $\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 6 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

B.  $\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 6 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

C.  $\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

D.  $\begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 8 & 3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$

E.  $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$

06. Jika  $A = \begin{bmatrix} 2a & 10 \\ a & -15 \end{bmatrix}$  dan  $B = \begin{bmatrix} c & 2d \\ d & -3 \end{bmatrix}$  serta memenuhi  $A = k.B$ , maka nilai  $c = \dots$

A. -10  
D. 5

B. -5  
E. 10

C. 2

07.  $3 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 1/2 & 6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 8 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \dots$

A.  $\begin{bmatrix} 15 & 12 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$

B.  $\begin{bmatrix} -9 & 8 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$

C.  $\begin{bmatrix} 25 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

D.  $\begin{bmatrix} 12 & 5 \\ 13 & -3 \end{bmatrix}$

E.  $\begin{bmatrix} 3 & -29 \\ -5 & 22 \end{bmatrix}$

08. Diketahui persamaan matriks  $2X + 3 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 0 & 12 & 6 \end{bmatrix} - X$ . Matriks  $X$  adalah ....

A.  $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

B.  $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

C.  $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

D.  $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

E.  $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

09. Diketahui persamaan  $\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}X = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ . Matriks  $X$  adalah ...

A.  $\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix}$

B.  $\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

C.  $\begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix}$

D.  $\begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$

E.  $\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$

10. Jika  $\begin{bmatrix} x & 3 \\ 2 & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ z & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & 8 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$  maka nilai dari  $x + y + z = \dots$

A. 5  
D. 10

B. 7  
E. 12

C. 9

11. Jika diketahui matriks  $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$  dan  $C = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  maka hasil dari

$(C - B) + (A + B) - (A - C) + (B - C)$  sama dengan ....

A.  $\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 6 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

B.  $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

C.  $\begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

D.  $\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

E.  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

12. Diketahui  $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$  dan  $Q = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$  maka matriks hasil dari  $2P^t + 5Q = \dots$

A.  $\begin{bmatrix} 18 & 3 \\ 12 & 10 \end{bmatrix}$

B.  $\begin{bmatrix} 15 & 13 \\ -4 & 10 \end{bmatrix}$

C.  $\begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 14 & 12 \end{bmatrix}$

D.  $\begin{bmatrix} 16 & 12 \\ -10 & 9 \end{bmatrix}$

E.  $\begin{bmatrix} 17 & -14 \\ 4 & 23 \end{bmatrix}$

13. Jika  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$  maka nilai  $a = \dots$

A. 1

B.  $2\frac{1}{2}$

C. 3

D. 5

E.  $5\frac{1}{2}$

# M A T R I K S

## C. Perkalian Matriks

Misalkan terdapat sebuah tabel ketidakhadiran dua orang siswa pada kursus Bahasa Inggris dengan alasan sakit (S), izin (I) atau Tanpa keterangan (TK)

| Siswa/Hari | S | I | TK |
|------------|---|---|----|
| Amir       | 2 | 1 | 3  |
| Budi       | 4 | 3 | 2  |

Dalam bentuk matriks  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

Untuk masing-masing alasan ketidakhadiran diberi bobot pelanggaran berdasarkan tabel sebagai berikut

| Alasan    | Bobot |
|-----------|-------|
| Sakit     | 1     |
| Izin      | 2     |
| Tampa Ket | 3     |

Dalam bentuk matriks  $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Jika dihitung total bobot pelanggaran kedua orang siswa tersebut, maka dilakukanlah proses perkalian matriks, yaitu :

| Siswa/Hari | S | I | TK |
|------------|---|---|----|
| Amir       | 2 | 1 | 3  |
| Budi       | 4 | 3 | 2  |

| Alasan    | Bobot |
|-----------|-------|
| Sakit     | 1     |
| Izin      | 2     |
| Tampa Ket | 3     |

| Siswa | Bobot                 |
|-------|-----------------------|
| Amir  | $2(1)+1(2)+3(3) = 13$ |
| Budi  | $4(1)+3(2)+2(3) = 16$ |

Atau dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(1)+1(2)+3(3) \\ 4(1)+3(2)+2(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Dari sini diperoleh kesimpulan :

Jika matriks C adalah hasil kali dari dua matriks A dan B maka berlaku hubungan :

$A_{p \times n} \times B_{n \times q} = C_{p \times q}$  Matriks  $C_{p \times q}$  didapat dengan cara mengalikan baris matriks  $A_{p \times n}$  dengan kolom matriks  $B_{n \times q}$

Untuk lebih memahami penjelasan di atas, akan diuraikan dalam contoh soal sebagai berikut:

01. Tentukanlah hasil setiap perkalian matriks berikut ini

$$(a) \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(d) \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Jawab

$$\begin{aligned} (a) \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2(-1)+1(3)+(-3)(4) & 2(2)+1(0)+(-3)(2) \\ -1(-1)+0(3)+2(4) & -1(2)+0(0)+2(2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2+3-12 & 4+0-6 \\ 1+0+8 & -2+0+4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -11 & -2 \\ 9 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2(0)+0(2) & 2(-4)+0(-1) \\ -3(0)+1(2) & -3(-4)+1(-1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0+0 & -8+0 \\ 0+2 & 12-1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ 2 & 11 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (c) \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3(-1)+(-1)(2) & 3(1)+(-1)(0) & 3(3)+(-1)(2) \\ -1(-1)+0(2) & -1(1)+0(0) & -1(3)+0(2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3-2 & 3-0 & 9-2 \\ 1+0 & -1+0 & -3+0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -5 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (d) \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2(1)+0(2) & 2(4)+0(-1) & 2(0)+0(3) \\ 0(1)+3(2) & 0(4)+3(-1) & 0(0)+3(3) \\ -1(1)+3(2) & -1(4)+3(-1) & -1(0)+3(3) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2+0 & 8+0 & 0+0 \\ 0+6 & 0-3 & 0+9 \\ -1+6 & -4-3 & 0+9 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 6 & -3 & 9 \\ 5 & -7 & 9 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

02. Diketahui dua table sebagai berikut :

**Tabel 1**

Kebutuhan bahan pembuat roti

|        | Tepung<br>(kg) | Mentega<br>(kg) |
|--------|----------------|-----------------|
| Roti1  | 3              | 2               |
| Roti 2 | 2              | 1               |
| Roti 3 | 4              | 1               |

**Tabel 2**

Harga bahan pembuar roti

|         | Januari<br>2008 | Februari<br>2008 |
|---------|-----------------|------------------|
| Tepung  | Rp.5.000        | Rp.5.500         |
| Mentega | Rp.6.000        | Rp.7.000         |

Susunlah tabel total biaya pembuatan setiap jenis roti dalam bulan Januari dan Februari 2008

Jawab

|        | Tepung<br>(kg) | Mentega<br>(kg) |
|--------|----------------|-----------------|
| Roti1  | 3              | 2               |
| Roti 2 | 2              | 1               |
| Roti 3 | 4              | 1               |

Dalam bentuk matriks  $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

|         | Januari<br>2008 | Februari<br>2008 |
|---------|-----------------|------------------|
| Tepung  | Rp.5.000        | Rp.5.500         |
| Mentega | Rp.6.000        | Rp.7.000         |

Dalam bentuk matriks  $B = \begin{bmatrix} 5000 & 5500 \\ 6000 & 7000 \end{bmatrix}$

Sehingga tabel total biaya pembuatan setiap jenis roti adalah :

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5000 & 5500 \\ 6000 & 7000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(5000) + 2(6000) & 3(5500) + 2(7000) \\ 2(5000) + 1(6000) & 2(5500) + 1(7000) \\ 4(5000) + 1(6000) & 4(5500) + 1(7000) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 27000 & 30500 \\ 16000 & 18000 \\ 26000 & 29000 \end{bmatrix}$$

Jika dibuat dalam bentuk tabel menjadi :

|        | Januari<br>2008 | Februari<br>2008 |
|--------|-----------------|------------------|
| Roti1  | 27.000          | 30.500           |
| Roti 2 | 16.000          | 18.000           |
| Roti 3 | 26.000          | 29.000           |

Terdapat beberapa sifat pada perkalian matriks, yaitu :

1.  $A \times B \neq B \times A$
2.  $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$
3.  $A(B + C) = AB + AC$
4. Jika p dan q anggota real dan A dan B suatu matriks maka  $(pA)(qB) = (pq)AB$
5. Jika  $A^t$  dan  $B^t$  adalah transpose matriks A dan B maka  $(A \times B)^t = B^t \times A^t$
6. Jika A matriks persegi maka  $A^2 = A \times A$

03. Diketahui matriks  $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 7 & -9 \\ 8 & 15 \end{bmatrix}$  dan  $C = \begin{bmatrix} -6 & 11 \\ -7 & -12 \end{bmatrix}$ . Tentukanlah matriks hasil dari  $AB + AC$

Jawab

$$\begin{aligned}
 AB + AC &= A(B + C) \\
 &= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 7 & -9 \\ 8 & 15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 11 \\ -7 & -12 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 3+4 & 6+12 \\ 1+6 & 2+18 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 7 & 18 \\ 7 & 20 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

04. Tentukanlah hasil dari  $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3/4 & -1/4 \\ 5/4 & 3/2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}$

Jawab

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \times \left( \begin{bmatrix} 3/4 & -1/4 \\ 5/4 & 3/2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -8 & 4 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6+2 & -3-1 \\ 10-12 & -5+6 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 40-6 & -20+3 \\ 32+4 & -16-2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 34 & -17 \\ 36 & -18 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

05. Diketahui matriks  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$  dan fungsi  $f(x) = x^2 - 3x$ , maka tentukanlah matriks

hasil dari  $f(A)$

Jawab

$$f(A) = A^2 - 3A$$

$$f(A) = A \cdot A - 3A$$

$$f(A) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$f(A) = \begin{bmatrix} 4+0 & 2-3 \\ 0-0 & 0+9 \end{bmatrix} \cdot - \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 0 & -9 \end{bmatrix}$$

$$f(A) = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \cdot - \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 0 & -9 \end{bmatrix}$$

$$f(A) = \begin{bmatrix} 4-6 & -1-3 \\ 0-0 & 9-(-9) \end{bmatrix}$$

$$f(A) = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 0 & 18 \end{bmatrix}$$

06. Tentukanlah nilai  $x$ ,  $y$  dan  $z$  jika  $\begin{bmatrix} 2y & 2x \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x+4 & -10 \\ -8 & z \end{bmatrix}$

Jawab

$$\begin{bmatrix} 2y & 2x \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x+4 & -10 \\ -8 & z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6y+2x & -2y-4x \\ -9+1 & 3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x+4 & -10 \\ -8 & z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6y+2x & -2y-4x \\ -8 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x+4 & -10 \\ -8 & z \end{bmatrix}$$

Maka :  $z = 1$  .....(1)

$$-2y - 4x = -10$$

$$y + 2x = 5$$

$$y = 5 - 2x \text{ ..... (2)}$$

$$6y + 2x = 3x + 4$$

$$6y + 2x - 3x = 4$$

$$6y - x = 4 \text{ ..... (3)}$$

$$(2)(3) \quad 6(5 - 2x) - x = 4$$

$$30 - 12x - x = 4$$

$$-13x = -26 \text{ maka } x = 2$$

$$y = 5 - 2(2) = 1$$

$$z = 1$$

## **SOAL LATIHAN 03**

### **C. Perkalian Matriks**

01. Hasil dari  $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  adalah ...

A.  $\begin{bmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

B.  $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

C.  $\begin{bmatrix} -7 & -1 & 4 \\ -6 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

D.  $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & -7 & 4 \end{bmatrix}$

E.  $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

02. Jika  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$  dan  $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$  maka  $A \times B = \dots$

A.  $\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}$

B.  $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

C.  $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

D.  $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

E.  $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

03. Jika  $P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$  dan  $Q = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$  maka matriks hasil dari  $P^2 - PQ - QP + Q^2 = \dots$

A.  $\begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 9 & -8 \end{bmatrix}$

B.  $\begin{bmatrix} 9 & -16 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

C.  $\begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$

D.  $\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

E.  $\begin{bmatrix} 10 & -9 \\ -9 & 37 \end{bmatrix}$

04. Hasil dari  $\begin{bmatrix} 12 & 24 \\ 48 & 36 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 16 & 32 \\ -24 & -16 \end{bmatrix} = \dots$

A.  $\begin{bmatrix} 54 & 108 \\ 72 & 320 \end{bmatrix}$

B.  $\begin{bmatrix} -384 & 0 \\ -96 & 960 \end{bmatrix}$

C.  $\begin{bmatrix} 320 & 96 \\ 960 & 12 \end{bmatrix}$

D.  $\begin{bmatrix} 96 & 960 \\ 540 & 320 \end{bmatrix}$

E.  $\begin{bmatrix} 960 & 320 \\ 720 & 54 \end{bmatrix}$

05. Diketahui  $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  dan  $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$  maka  $(A \times B)^t = \dots$

A.  $\begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

B.  $\begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

C.  $\begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$

D.  $\begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$

E.  $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

06. Diketahui  $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$  maka  $(A^2)^t = \dots$

A.  $\begin{bmatrix} -5 & 9 \\ -9 & -8 \end{bmatrix}$

B.  $\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ -9 & 7 \end{bmatrix}$

C.  $\begin{bmatrix} -5 & -9 \\ 8 & -7 \end{bmatrix}$

D.  $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 8 & -7 \end{bmatrix}$

E.  $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

07. Diketahui  $\begin{bmatrix} x & -2 \\ 3 & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 5 & -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & 14 \\ 17 & 2x \end{bmatrix}$  maka nilai  $x + y = \dots$

A. 5

B. 8

C. 10

D. 12

E. 15

08. Manakah dari pernyataan berikut ini bernilai salah

A.  $(P + Q)^t = P^t + Q^t$

B.  $(P \times Q)^t \neq P^t \times Q^t$

C.  $(2P)^t = 2P^t$

D.  $(P^2)^t = (P^t)^2$

E.  $(P \times Q)^2 = P^2 \times Q^2$

09. Manakah dari pernyataan berikut ini bernilai salah

A.  $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$

B.  $2A \times 3B = 6AB$

C.  $A(B + C) = AB + AC$

D.  $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

E.  $(A - B)^2 = (A - B)(A - B)$

10. Nilai  $x$  yang memenuhi persamaan matriks  $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 13 \end{bmatrix}$  adalah ...

A. -3

B. 2

C. 1

D. 5

E. 6

11. Jika  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$  dan  $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  maka hasil dari  $(A - B)(A + B) - (A + B)(A - B)$  adalah

A.  $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

B.  $\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

C.  $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

D.  $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

E.  $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$

12.  $\begin{bmatrix} 2x & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 10x \\ -7 & 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 3 & x \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ . Nilai x yang memenuhi persamaan diatas adalah...

- A. -2  
D. 6  
B. 2  
E. 8  
C. 4

13. Diketahui  $f(x) = x^2 + 2x$ . Jika  $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$  maka  $f(A) = \dots$

- A.  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$   
D.  $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$   
B.  $\begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$   
E.  $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$   
C.  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

14. Jika matriks  $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$  dan  $C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ , maka  $A \times B \times C = \dots$

- A.  $\begin{bmatrix} 27 & 9 \\ 15 & 0 \end{bmatrix}$   
D.  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 10 \end{bmatrix}$   
B.  $\begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & -9 \end{bmatrix}$   
E.  $\begin{bmatrix} 0 & 20 \\ 15 & 0 \end{bmatrix}$   
C.  $\begin{bmatrix} 0 & 20 \\ 0 & -15 \end{bmatrix}$

15.  $\begin{bmatrix} -1 & d \\ 5 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ -3 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c-3 & 1 \\ b & 2b \end{bmatrix}$ . Nilai a = ...

- A. 2  
D. 6  
B. 3  
E. 8  
C. 4

16. Dari persamaan matriks  $\begin{pmatrix} p+1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & p+r \\ q & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q & -4 \\ p+q & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$  nilai  $p + 2q + 2r =$

- A. 2  
D. 11  
B. 3  
E. 23  
C. 5

17. Jika  $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} x & -1 \\ y & 1 \end{bmatrix}$  dan  $C = \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ 16 & 3 \end{bmatrix}$  serta berlaku  $A^t \cdot B = C$  maka  $2x + y =$

- A. 7  
D. 10  
B. 8  
E. 11  
C. 9

18. Jika  $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 2 \\ 0 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot B = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$  maka matriks B adalah ...

- A.  $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$   
D.  $\begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$   
B.  $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$   
E.  $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ \sqrt{2} & 3 \end{bmatrix}$   
C.  $\begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{2} & -2 \end{bmatrix}$

19. Diketahui  $\begin{pmatrix} 4 & a-2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ -11 & -6 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  maka Nilai  $a = \dots$
- A. 0  
D. 14  
B. 10  
E. 25  
C. 13
20. Diketahui dua matriks  $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  dan  $B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ -2 & y \end{pmatrix}$  Jika  $AB = BA$ , maka  $4x - 3y = \dots$
- A. -26  
D. 7  
B. -23  
E. 26  
C. -7
21. Jika diketahui dua buah matriks  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$  dan  $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ , maka yang benar diantara hubungan berikut adalah ...
- A.  $BA = 3B$   
D.  $AB = 3A$   
B.  $BA = 3A$   
E.  $3AB = B$   
C.  $AB = 3B$
22. Jika  $I$  matrik satuan dan  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$  sehingga  $A^2 = pA + qI$  maka  $p + q = \dots$
- A. 15  
D. -5  
B. 10  
E. -10  
C. 5
23. Diketahui persamaan matriks  $3 \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 10 & 3 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & y \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ . Nilai  $2x - 3y$  adalah
- A. -9  
D. 8  
B. -7  
E. 11  
C. -4

# M A T R I K S

## D. Invers Perkalian Matriks ordo (2 x 2)

Matriks identitas perkalian (dilambangkan dengan I) adalah sebuah matriks persegi yang memenuhi sifat: Jika A adalah matriks persegi yang berordo sama dengan I, maka berlaku

$$A \times I = I \times A = A$$

Untuk matriks identitas ordo (2 x 2) dapat dinyatakan sebagai  $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Bukti :

Misalkan  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  maka  $A \times I = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+0 & 0+b \\ c+0 & 0+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = A$

Jika A sebuah matriks persegi maka terdapat invers perkalian dari matriks A yang dilambangkan dengan  $A^{-1}$  dan memenuhi sifat:

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I$$

Untuk matriks ordo (2 x 2), invers dari matriks  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  dapat ditentukan sebagai berikut :

Misalkan  $A^{-1} = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$  maka  $A \times A^{-1} = I$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sehingga :  $ap + br = 1$  ..... (1)

$cp + dr = 0$  ..... (2)

$aq + bs = 0$  ..... (3)

$cq + ds = 1$  ..... (4)

Dari (1)(2)  $\begin{array}{l|l} ap + br = 1 & (d) \rightarrow adp + bdr = d \\ cp + dr = 0 & (b) \rightarrow bcp + bdr = 0 \end{array}$

$$adp - bcp = d$$

$(ad - bc) p = d$  jadi  $p = \frac{d}{ad - bc}$

$$\begin{array}{lcl} \text{Dari (1)(2)} & \begin{array}{l} ap + br = 1 \\ cp + dr = 0 \end{array} & \begin{array}{l} (c) \rightarrow acp + bcr = c \\ (a) \rightarrow \underline{acp + adr = 0} \\ bcr - adr = c \\ adr - bcr = -c \end{array} \end{array}$$

$$(ad - bc)r = -c \quad \text{jadi } r = \frac{-c}{ad - bc}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{Dari (3)(4)} & \begin{array}{l} aq + bs = 0 \\ cq + ds = 1 \end{array} & \begin{array}{l} (d) \rightarrow adq + bds = 0 \\ (b) \rightarrow \underline{bcq + bds = b} \\ adq - bcq = -b \end{array} \end{array}$$

$$(ad - bc)q = -b \quad \text{jadi } q = \frac{-b}{ad - bc}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{Dari (3)(4)} & \begin{array}{l} aq + bs = 0 \\ cq + ds = 1 \end{array} & \begin{array}{l} (c) \rightarrow acq + bcs = 0 \\ (a) \rightarrow \underline{acq + ads = a} \\ bcs - ads = -a \\ ads - bcs = a \end{array} \end{array}$$

$$(ad - bc)s = a \quad \text{jadi } s = \frac{a}{ad - bc}$$

$$\text{Jadi : } A^{-1} = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad - bc} & \frac{-b}{ad - bc} \\ \frac{-c}{ad - bc} & \frac{a}{ad - bc} \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\text{maka invers dari A dirumuskan } A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

dimana  $ad - bc$  dinamakan determinan.

Jika matriks A mempunyai determinan 0 maka A dikatakan matriks singular, yaitu matriks yang tidak mempunyai invers.

Terdapat beberapa sifat yang berkenaan dengan invers matriks, yaitu :

### **Sifat 1**

Jika A adalah matriks berordo  $(2 \times 2)$  dan k adalah bilangan real, maka

$$(k.A)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$$

Bukti

$$\text{Misalkan } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \text{ maka } k.A = k \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Sehingga } (k.A)^{-1} &= \frac{1}{(ka)(kd) - (kb)(kc)} \begin{bmatrix} kd & -kb \\ -kc & ka \end{bmatrix} \\ &= \frac{k}{k^2(ad - bc)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{(ad - bc)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{k} A^{-1} \end{aligned}$$

## **Sifat 2**

Jika A adalah transpose matriks A maka berlaku  $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

Bukti

$$\text{Jika } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \text{ maka } A^t = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \text{ sehingga } (A^t)^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix} \dots\dots\dots(1)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \text{ sehingga } (A^{-1})^t = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix} \dots\dots\dots(2)$$

Dari (1) dan (2) terbukti bahwa  $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

## **Sifat 3**

Jika A adalah matriks berordo (2 x 2) maka berlaku  $(A^{-1})^{-1} = A$

Bukti

$$\text{Misalkan : } (A^{-1})^{-1} = B \dots\dots\dots(1)$$

$$\text{Maka } A^{-1} (A^{-1})^{-1} = A^{-1} \cdot B \quad (\text{kedua ruas dikalikan dengan } A^{-1} \text{ dari kiri})$$

$$I = A^{-1} \cdot B$$

$$A \times I = A \times A^{-1} \cdot B \quad (\text{Kedua ruas dikalikan dengan } A)$$

$$A = I \times B$$

$$A = B \dots\dots\dots(2)$$

Dari (1) dan (2) terbukti bahwa  $(A^{-1})^{-1} = A$

## **Sifat 4**

Jika A dan B adalah matriks berordo (2 x 2) maka berlaku :  $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$

Bukti

$$\text{Misalkan } (A \times B)^{-1} = C \dots\dots\dots(1)$$

maka

$$((A \times B)^{-1})^{-1} = C^{-1} \quad (\text{kedua ruas di inverskan})$$

$$A \times B = C^{-1}$$

$$A^{-1} \times A \times B = A^{-1} \times C^{-1} \quad (\text{Kedua ruas dikalikan dengan } A^{-1} \text{ dari kiri})$$

$$I \times B = A^{-1} \times C^{-1}$$

$$B = A^{-1} \times C^{-1}$$

$$B \times C = A^{-1} \times C^{-1} \times C \quad (\text{Kedua ruas dikalikan dengan } C \text{ dari kanan})$$

$$B \times C = A^{-1} \times I$$

$$B \times C = A^{-1}$$

$$B^{-1} \times B \times C = B^{-1} \times A^{-1} \quad (\text{Kedua ruas dikalikan dengan } B^{-1} \text{ dari kiri})$$

$$I \times C = B^{-1} \times A^{-1}$$

$$C = B^{-1} \times A^{-1} \dots\dots\dots(2)$$

Dari (1) dan (2) diperoleh :  $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$

### **Sifat 5**

Jika A, B dan C adalah matriks-matriks berordo (2 x 2) maka :

- (1) Tidak berlaku sifat komutatif perkalian, sehingga  $A \times B \neq B \times A$
- (2) Berlaku sifat asosiatif perkalian, sehingga :  $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$
- (3) Berlaku sifat distributif, sehingga  $A(B + C) = AB + AC$

Untuk lebih jelasnya akan diuraikan dalam contoh soal berikut ini

01. Tentukanlah invers setiap matriks berikut ini :

$$(a) A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (b) B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Jawab

$$(a) A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ maka } A^{-1} = \frac{1}{(2)(3)-(5)(1)} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$
$$A^{-1} = \frac{1}{6-5} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Untuk membuktikannya harus ditunjukkan bahwa  $A \times B = I$

$$\text{Tinjau : } A \times B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 6-5 & -10+10 \\ 3-3 & -5+6 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= I$$

Jadi terbukti bahwa A dan B saling invers

$$(b) A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \text{ maka } A^{-1} = \frac{1}{(2)(5)-(4)(3)} \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$
$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -5/2 & 2 \\ 3/2 & -1 \end{bmatrix}$$

02. Tentukan invers setiap matriks berikut ini :

$$(a) A = \begin{bmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/4 & 5/4 \end{bmatrix} \quad (b) B = \begin{bmatrix} 32 & -64 \\ 16 & -48 \end{bmatrix}$$

Jawab

$$(a) A = \begin{bmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/4 & 5/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/4 & 6/4 \\ 3/4 & 5/4 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{maka } A^{-1} = 4 \cdot \frac{1}{(4)(5) - (6)(3)} \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{4}{20 - 18} \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -12 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$(b) B = \begin{bmatrix} 32 & -64 \\ 16 & -48 \end{bmatrix} = 16 \cdot \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{maka } B^{-1} = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{(2)(-3) - (-4)(1)} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{-6 + 4} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = -\frac{1}{32} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 3/32 & -1/8 \\ 1/32 & -1/16 \end{bmatrix}$$

03. Jika  $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$  dan  $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ , maka tentukanlah matriks hasil dari

$$(A \times B)^{-1} \times A$$

Jawab

$$(A \times B)^{-1} \times A = B^{-1} \times A^{-1} \times A$$

$$= B^{-1} \times I$$

$$= B^{-1}$$

$$= \frac{1}{(3)(3) - (2)(4)} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{9-8} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

04. Jika matriks  $A = \begin{bmatrix} x-4 & 6-x \\ 3 & x-2 \end{bmatrix}$  merupakan matriks singular maka tentukanlah

nilai x

Jawab

Jika A matriks singular maka  $\det(A) = 0$

Sehingga :  $\det(A) = (x-4)(x-2) - (6-x)3 = 0$

$$x^2 - 2x - 4x + 8 - 18 + 3x = 0$$

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$(x-5)(x+2) = 0$$

Jadi  $x = -2$  dan  $x = 5$

05. Jika matriks  $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$  adalah invers dari matriks  $B = \begin{bmatrix} -1 & x+y \\ 2x+1 & 5/2 \end{bmatrix}$  maka

tentukanlah nilai x dan y

Jawab

$$A^{-1} = B$$

$$\frac{1}{(5)(-2) - (-2)(6)} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & x+y \\ 2x+1 & 5/2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{-10+12} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & x+y \\ 2x+1 & 5/2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & x+y \\ 2x+1 & 5/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 5/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & x+y \\ 2x+1 & 5/2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Maka : } 2x + 1 = -3$$

$$2x = -4$$

$$x = -2$$

$$x + y = 1$$

$$-2 + y = 1$$

$$y = 3$$

## **SOAL LATIHAN 04**

### **D. Invers Perkalian Matriks ordo (2 x 2)**

01. Diketahui matriks  $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ , maka  $A^{-1} = \dots$

A.  $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3/2 & 1 \end{bmatrix}$

B.  $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3/2 & 2 \end{bmatrix}$

C.  $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -3/2 & -2 \end{bmatrix}$

D.  $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -3/2 & -2 \end{bmatrix}$

E.  $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3/2 & -2 \end{bmatrix}$

02. Diketahui matriks  $A = \begin{bmatrix} 1 & -3/4 \\ 3/4 & -1/2 \end{bmatrix}$ , maka matriks  $A^{-1} = \dots$

A.  $\begin{bmatrix} 4 & -8 \\ -3/2 & 6 \end{bmatrix}$

B.  $\begin{bmatrix} 8 & -16 \\ -3 & 12 \end{bmatrix}$

C.  $\begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}$

D.  $\begin{bmatrix} -8 & 12 \\ -12 & 16 \end{bmatrix}$

E.  $\begin{bmatrix} -16 & 24 \\ -24 & 32 \end{bmatrix}$

03. Diketahui  $A = \begin{bmatrix} -4 & -9 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$  maka matriks hasil dari  $(\frac{1}{4}A)^{-1} + 2A^{-1} = \dots$

A.  $\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 12 & 3 \end{bmatrix}$

B.  $\begin{bmatrix} 6 & -9 \\ 9 & -15 \end{bmatrix}$

C.  $\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$

D.  $\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$

E.  $\begin{bmatrix} -3 & 9 \\ -6 & 15 \end{bmatrix}$

04. Diketahui  $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$  dan  $Q = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ , maka hasil dari  $(P \cdot Q)^{-1} = \dots$

A.  $\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}$

B.  $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

C.  $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

D.  $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$

E.  $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

05. Diketahui  $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$  dan  $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ . Matriks hasil dari  $(A \times B)^{-1} \times A = \dots$

A.  $\begin{bmatrix} 10 & -3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

B.  $\begin{bmatrix} 18 & 16 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

C.  $\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

D.  $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}$

E.  $\begin{bmatrix} -10 & 8 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}$

06. Diketahui matriks  $A = \begin{bmatrix} x+1 & x-1 \\ 2x & x \end{bmatrix}$ . Jika berlaku  $\det(A) = 4x - 30$  maka nilai  $x = \dots$

- A. 3 dan 5  
D. 5 dan 6  
B. -3 dan 5  
E. 4 dan 6  
C. 5 dan -6

07. Jika matriks  $A = \begin{bmatrix} x+2 & x-1 \\ 8 & x \end{bmatrix}$  merupakan matriks singular maka nilai  $x = \dots$

- A. 6 dan 2  
D. -4 dan 3  
B. -6 dan 2  
E. 4 dan 2  
C. 4 dan 3

08. Jika  $A = \begin{bmatrix} x & 5 \\ 1 & x-2 \end{bmatrix}$  dan  $B = \begin{bmatrix} 2 & 3x-2 \\ x & 5 \end{bmatrix}$ . serta  $\det(A) = \det(B)$  maka nilai  $x = \dots$

- A. -3/2 dan 1/2  
D. 2 dan 5/2  
B. 1/2 dan 5/2  
E. 3 dan 1/2  
C. -3/2 dan 5/2

09. Jika  $P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ x & x+y \end{bmatrix}$  dan  $P^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 9 & -4 \end{bmatrix}$  maka nilai  $y = \dots$

- A. -7  
D. 6  
B. -4  
E. 8  
C. 2

10. Manakah dari pernyataan berikut bernilai salah

- A.  $(2A)^{-1} + (3A)^{-1} \neq (5A)^{-1}$   
C.  $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$   
E.  $(A+B)^{-1} = B^{-1} + A^{-1}$   
B.  $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$   
D.  $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$

11. Manakah dari pernyataan berikut bernilai benar

- A.  $\det(A^{-1}) = \det(A)$   
C.  $\det(A^t) = \det(A)$   
E.  $\det(A^{-1}) = \det(A^t)$   
B.  $\det(2A) = 2 \cdot \det(A)$   
D.  $\det(A^2) = 2 \cdot \det(A)$

12. Diketahui matriks  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ . Jika  $k \in \mathbb{R}$  dan  $k \cdot \det(A) = \det(2A)$ . Maka  $k = \dots$

- A. 2  
D. 5  
B. 3  
E. 8  
C. 4

13. Diketahui  $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$  dan  $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  maka hasil dari  $B^{-1} \times (A^{-1} \times B)^{-1} \times A^{-1}$  adalah

- A.  $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$   
D.  $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$   
B.  $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$   
E.  $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$   
C.  $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

14. Diketahui  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$  dan  $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  maka matriks hasil dari  $(A \times B)^{-1} \times B^{-1}$  adalah...

A.  $\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}$

B.  $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$

C.  $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

D.  $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

E.  $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 5 & -24 \end{bmatrix}$

15. Jika matriks  $A = \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$  adalah invers dari matriks  $B = \begin{bmatrix} 2 & x+2 \\ x+y & -3 \end{bmatrix}$  maka nilai

dari  $x - y =$

A. -12

B. -10

C. 5

D. 8

E. 15

16. Jika determinan matriks  $\begin{bmatrix} 2x & 5 \\ 9 & x+3 \end{bmatrix}$  sama dengan determinan transpose matriks

$\begin{bmatrix} 5 & 13 \\ 4 & 3x \end{bmatrix}$  maka nilai  $x = \dots$

A. -7/2

B. -1

C. 1

D. 3

E. 3/2

17. Jika matriks A dan B saling invers dan I adalah matriks identitas perkalian maka bentuk sederhana dari  $(I + B)(I - A)(B - A)$  adalah

A.  $B^2 - A^2$

B.  $(B - A)^2$

C.  $A^2 + B^2$

D.  $(A + B)^2$

E.  $A + B$

18. Invers dari matriks  $A = \begin{bmatrix} 24 & 24 \\ 48 & 36 \end{bmatrix}$  adalah ...

A.  $\begin{bmatrix} -1/8 & 1/12 \\ 1/6 & -1/12 \end{bmatrix}$

B.  $\begin{bmatrix} 1/6 & -1/8 \\ 2 & 1/6 \end{bmatrix}$

C.  $\begin{bmatrix} 1/6 & 1/12 \\ -1/12 & 1/8 \end{bmatrix}$

D.  $\begin{bmatrix} -1/8 & 1/6 \\ 1/12 & 1/8 \end{bmatrix}$

E.  $\begin{bmatrix} -1/8 & 1/6 \\ 1/6 & -1/12 \end{bmatrix}$

19. Jika  $A = \begin{bmatrix} 3 & k-5 \\ t+3 & t+2 \end{bmatrix}$  dan  $B = \begin{bmatrix} 3m & 1-n \\ 5m & 3n-2 \end{bmatrix}$  dan  $A = B$ , maka  $2 \cdot \det(A) = \dots$

A. 28

B. 34

C. 14

D. 12

E. 10

20. Diketahui matriks  $A = \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$  dan matriks  $B = \begin{bmatrix} 2 & x+2 \\ x+y & -3 \end{bmatrix}$ . Jika  $A = B^{-1}$ , maka nilai  $x - y = \dots$
- A. -12  
B. -10  
C. 5  
D. 8  
E. 15
21. Diketahui matriks  $P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ ,  $Q = \begin{bmatrix} x+y & 2 \\ 3 & y \end{bmatrix}$  dan  $R = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ . Jika  $Q - P = R^T$  dimana  $R^T$  adalah transpose matriks R, dan  $(Q - P)^{-1}$  adalah invers dari  $(Q - P)$ , maka determinan  $(Q - P)^{-1} =$
- A. -13  
B. -1  
C. 1  
D. 13  
E. 42

# M A T R I K S

## E. Menyelesaikan Persamaan Matriks

Salah satu diantara penggunaan invers matriks adalah untuk menyelesaikan persamaan matriks. Ada dua macam rumus dasar menyelesaikan persamaan matriks, yaitu :

(1) Jika  $A \times B = C$  maka  $B = A^{-1} \times C$

(2) Jika  $A \times B = C$  maka  $A = C \times B^{-1}$

Bukti :

(1) Jika  $A \times B = C$  maka  $A^{-1} \times A \times B = A^{-1} \times C$

$$I \times B = A^{-1} \times C$$

$$B = A^{-1} \times C$$

(2) Jika  $A \times B = C$  maka  $A \times B \times B^{-1} = C \times B^{-1}$

$$A \times I = C \times B^{-1}$$

$$A = C \times B^{-1}$$

Untuk lebih memahami rumus diatas, ikutilah contoh soal berikut ini :

01. Diketahui matriks  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  dan  $C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$  maka tentukanlah matriks B

jika  $B \times A = C$

Jawab

$$B \times A = C$$

$$B = C \times A^{-1}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} \times \frac{1}{8-9} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} \times -1 \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -12+3 & 9-2 \\ 8-15 & -6+10 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -9 & 7 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$$

02. Diketahui  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ ,  $C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  dan  $D = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$  maka tentukan matriks B

jika  $A \times C \times B = D$

Jawab

$$A \times C \times B = D$$

$$C \times B = A^{-1} \times D$$

$$B = C^{-1} \times A^{-1} \times D$$

$$B = \frac{1}{3-4} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \times \frac{1}{-6+4} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = -1 \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \times -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3+8 & 1-4 \\ 6-12 & -2+6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0+6 & 20-6 \\ 0-8 & -24+8 \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6 & 14 \\ -8 & -16 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -4 & -8 \end{bmatrix}$$

03 Diketahui  $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$  dan  $C = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ . Jika  $(A^{-1}.B)^{-1} = C$  maka matriks A

adalah ...

Jawab

$$(A^{-1}.B)^{-1} = C$$

$$B^{-1} \times (A^{-1})^{-1} = C$$

$$B^{-1} \times A = C$$

$$B \times B^{-1} \times A = B \times C$$

$$I \times A = B \times C$$

$$A = B \times C$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2+6 & 8+6 \\ 0+8 & 0+8 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 14 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}$$

04. Jika  $A = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$ ,  $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$  dan  $D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ , serta  $(A^{-1} \times C)^{-1}(A^{-1} \times B) = D$

maka tentukanlah matriks B

Jawab

$$(A^{-1} \times C)^{-1}(A^{-1} \times B) = D$$

$$C^{-1} (A^{-1})^{-1} A^{-1} B = D$$

$$C^{-1} A A^{-1} B = D$$

$$C^{-1} I B = D$$

$$C^{-1} B = D$$

$$B = C \times D$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -4+1 & 0+4 \\ -10+3 & 0+12 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -7 & 12 \end{bmatrix}$$

Kegunaan lain dari invers matriks adalah untuk menentukan penyelesaian sistim persamaan linier. Tentu saja teknik penyelesaiannya dengan aturan persamaan matriks, yaitu :

$$\text{Jika } \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad \text{maka } \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Selain dengan persamaan matriks, teknik menyelesaikan sistem persamaan linier juga dapat dilakukan dengan determinan matriks. Aturan dengan cara ini adalah :

Jika matriks  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  maka  $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ . Sehingga

$$\text{Jika } \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad \text{maka } D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - b_1a_2$$

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - b_1c_2$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - c_1a_2$$

$$\text{Maka } x = \frac{D_x}{D} \quad \text{dan} \quad y = \frac{D_y}{D}$$

Untuk lebih jelasnya, ikutilah contoh soal berikut ini:

05. Tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan  $2x - 3y = 8$  dan  $x + 2y = -3$  dengan metoda:

(a) Invers matriks

(b) Determinan

Jawab

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 8 \\ x + 2y &= -3 \end{aligned} \quad \text{maka} \quad \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -3 \end{bmatrix}$$

(a) Dengan metoda invers matriks diperoleh

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 8 \\ -3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \frac{1}{4 - (-3)} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ -3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ -3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 16 - 9 \\ -8 - 6 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 7 \\ -14 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Jadi  $x = 1$  dan  $y = -2$

(b) Dengan metoda determinan matriks diperoleh

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (2)(2) - (-3)(1) = 4 + 3 = 7$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = (8)(2) - (-3)(-3) = 16 - 9 = 7$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = (2)(-3) - (8)(1) = -6 - 8 = -14$$

$$\text{Maka } x = \frac{D_x}{D} = \frac{7}{7} = 1$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-14}{7} = 2$$

06. Tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan  $y = \frac{1}{2}x + 5$  dan  $x + 6 = \frac{2}{3}y$

dengan metoda:

(a) Invers matriks

(b) Determinan

Jawab

$$y = \frac{1}{2}x + 5 \quad | \quad (2) \longrightarrow 2y = x + 10 \longrightarrow -x + 2y = 10$$

$$x + 6 = \frac{2}{3}y \quad | \quad (3) \longrightarrow 3x + 18 = 2y \longrightarrow 3x - 2y = -18$$

$$-x + 2y = 10$$

$$3x - 2y = -18$$

Maka

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = (-1)(-2) - (2)(3) = 2 - 6 = -4$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 10 & 2 \\ -18 & -2 \end{vmatrix} = (10)(-2) - (2)(-18) = -20 - (-36) = 16$$

$$D_y = \begin{vmatrix} -1 & 10 \\ 3 & -18 \end{vmatrix} = (-1)(-18) - (10)(3) = 18 - 30 = -12$$

$$\text{Maka } x = \frac{D_x}{D} = \frac{16}{-4} = -4$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-12}{-4} = 3$$

(3) Sistem persamaan linier tiga variabel

$$\text{Jika } \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \text{ diperoleh nilai determinan :}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 \cdot c_3 + b_1 \cdot c_2 \cdot a_3 + c_1 \cdot a_2 \cdot b_3 - c_1 \cdot b_2 \cdot a_3 - a_1 \cdot c_2 \cdot b_3 - b_1 \cdot a_2 \cdot c_3$$

$$D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = d_1 \cdot b_2 \cdot c_3 + b_1 \cdot c_2 \cdot d_3 + c_1 \cdot d_2 \cdot b_3 - c_1 \cdot b_2 \cdot d_3 - d_1 \cdot c_2 \cdot b_3 - b_1 \cdot d_2 \cdot c_3$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \cdot d_2 \cdot c_3 + d_1 \cdot c_2 \cdot a_3 + c_1 \cdot a_2 \cdot d_3 - c_1 \cdot d_2 \cdot a_3 - a_1 \cdot c_2 \cdot d_3 - d_1 \cdot a_2 \cdot c_3$$

$$D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 \cdot d_3 + b_1 \cdot d_2 \cdot a_3 + d_1 \cdot a_2 \cdot b_3 - d_1 \cdot b_2 \cdot a_3 - a_1 \cdot d_2 \cdot b_3 - b_1 \cdot a_2 \cdot d_3$$

Sehingga nilai  $x = \frac{D_x}{D}$ ,  $y = \frac{D_y}{D}$  dan  $z = \frac{D_z}{D}$

Untuk lebih jelasnya, ikutilah contoh soal berikut ini:

07. Tentukanlah himpunan penyelesaian sistem persamaan linier

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y + z = 2 \\ x - y - 2z = -1 \\ x + y - z = 3 \end{array} \right\} \text{ dengan menggunakan metoda determinan}$$

Jawab

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & | & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & | & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D = (1)(-1)(-1) + (2)(-2)(1) + (1)(1)(1) - (1)(-1)(1) - (1)(-2)(1) - (2)(1)(-1)$$

$$D = 1 - 4 + 1 + 1 + 2 + 2$$

$$D = 3$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & | & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & | & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & | & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D_x = (2)(-1)(-1) + (2)(-2)(3) + (1)(-1)(1) - (1)(-1)(3) - (2)(-2)(1) - (2)(-1)(-1)$$

$$D_x = 2 - 12 - 1 + 3 + 4 - 2$$

$$D_x = -6$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & | & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & | & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$D_y = (1)(-1)(-1) + (2)(-2)(1) + (1)(1)(3) - (1)(-1)(1) - (1)(-2)(3) - (2)(1)(-1)$$

$$D_y = 1 - 4 + 3 + 1 + 6 + 2$$

$$D_y = 9$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & | & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & | & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D_z = (1)(-1)(3) + (2)(-1)(1) + (2)(1)(1) - (2)(-1)(1) - (1)(-1)(1) - (2)(1)(3)$$

$$D_z = -3 - 2 + 2 + 2 + 1 - 6$$

$$D_z = -6$$

$$\text{Jadi } x = \frac{D_x}{D} = \frac{-6}{3} = -2$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{9}{3} = 3$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{-6}{3} = -2$$

08. Tentukanlah himpunan penyelesaian sistem persamaan linier

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y = -3 \\ y + z = 1 \\ 2x + z = 1 \end{array} \right\} \quad \text{dengan menggunakan metoda determinan}$$

Jawab

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$D = (1)(1)(1) + (-2)(1)(2) + (0)(0)(0) - (0)(1)(2) - (1)(1)(0) - (-2)(0)(1)$$

$$D = (1) + (-4) + (0) - (0) - (0) - (0)$$

$$D = 1 - 4 + 0 + 0 + 0 + 0$$

$$D = -3$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 0 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$D_x = (-3)(1)(1) + (-2)(1)(1) + (0)(1)(0) - (0)(1)(1) - (-3)(1)(0) - (-2)(1)(1)$$

$$D_x = (-3) + (-2) + (0) - (0) - (0) - (-2)$$

$$D_x = -3 - 2 + 0 - 0 - 0 + 2$$

$$D_x = -3$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D_y = (1)(1)(1) + (-3)(1)(2) + (0)(0)(1) - (0)(1)(2) - (1)(1)(1) - (-3)(0)(1)$$

$$D_y = (1) + (-6) + (0) - (0) - (1) - (0)$$

$$D_y = 1 - 6 + 0 + 0 - 1 - 0$$

$$D_y = -6$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$D_z = (1)(1)(1) + (-2)(1)(2) + (-3)(0)(0) - (-3)(1)(2) - (1)(1)(0) - (-2)(0)(1)$$

$$D_z = (1) + (-4) + (0) - (-6) - (0) - (0)$$

$$D_z = 1 - 4 + 0 + 6 - 0 - 0$$

$$D_z = 3$$

$$\text{Jadi } x = \frac{D_x}{D} = \frac{-3}{-3} = 1$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-6}{-3} = 2$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{3}{-3} = -1$$

## **SOAL LATIHAN 05**

### **E. Menyelesaikan Persamaan Matriks**

01. Diketahui  $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$  dan  $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ . Jika  $A \cdot B = C$  maka matriks  $B = \dots$

A.  $\begin{bmatrix} -24 & 5 \\ 14 & -3 \end{bmatrix}$

B.  $\begin{bmatrix} 24 & -5 \\ -14 & 3 \end{bmatrix}$

C.  $\begin{bmatrix} 24 & -14 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$

D.  $\begin{bmatrix} 12 & -7 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

E.  $\begin{bmatrix} 12 & -6 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$

02. Diketahui  $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$  dan  $C = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ . Jika  $A \cdot B = C$  maka matriks  $A = \dots$

A.  $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -6 & 12 \end{bmatrix}$

B.  $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

C.  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 9 \end{bmatrix}$

D.  $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}$

E.  $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

03. Jika  $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 8 \end{bmatrix}$  maka nilai  $x + y = ..$

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

E. 6

04. Diketahui  $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$  dan  $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$ . Jika  $A \cdot B \cdot C = D$  maka matriks  $C$  adalah

A.  $\begin{bmatrix} 39 & -18 \\ -44 & 25 \end{bmatrix}$

B.  $\begin{bmatrix} 39 & -48 \\ -42 & 26 \end{bmatrix}$

C.  $\begin{bmatrix} 44 & -54 \\ 39 & -48 \end{bmatrix}$

D.  $\begin{bmatrix} 24 & -36 \\ 21 & 24 \end{bmatrix}$

E.  $\begin{bmatrix} 44 & -34 \\ 32 & 48 \end{bmatrix}$

05. Diketahui  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$  dan  $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$ . Jika  $A \cdot B \cdot C = D$  maka matriks  $B$  adalah

A.  $\begin{bmatrix} 21 & 5 \\ 18 & -8 \end{bmatrix}$

B.  $\begin{bmatrix} 19 & -7 \\ 23 & -8 \end{bmatrix}$

C.  $\begin{bmatrix} 4 & -7 \\ 18 & 8 \end{bmatrix}$

D.  $\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 20 & 18 \end{bmatrix}$

E.  $\begin{bmatrix} 10 & 8 \\ -7 & 15 \end{bmatrix}$

06. Diketahui  $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  dan  $C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ . Jika  $(A^{-1} \cdot B)^{-1} = C$  maka matriks B adalah

- A.  $\begin{bmatrix} -11 & 19 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$                       B.  $\begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$                       C.  $\begin{bmatrix} -11 & 19 \\ 12 & 8 \end{bmatrix}$   
D.  $\begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$                       E.  $\begin{bmatrix} -10 & 10 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

07. Diketahui  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  dan  $D = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Jika  $[(A^{-1} \cdot B)^{-1} \cdot C]^{-1} = D$  maka matriks B adalah ...

- A.  $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 24 & -10 \end{bmatrix}$                       B.  $\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 18 & -12 \end{bmatrix}$                       C.  $\begin{bmatrix} 8 & -24 \\ 24 & 7 \end{bmatrix}$   
D.  $\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 20 & 6 \end{bmatrix}$                       E.  $\begin{bmatrix} -12 & 10 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$

08. Diketahui matriks  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$  dan  $B = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$ . Jika  $A \cdot (B \cdot A)^{-1} \cdot X = A$ , maka matriks X adalah ...

- A.  $\begin{bmatrix} 48 & 18 \\ 16 & 24 \end{bmatrix}$                       B.  $\begin{bmatrix} 24 & 12 \\ 18 & 32 \end{bmatrix}$                       C.  $\begin{bmatrix} 30 & 18 \\ 8 & 12 \end{bmatrix}$   
D.  $\begin{bmatrix} 19 & 43 \\ 22 & 50 \end{bmatrix}$                       E.  $\begin{bmatrix} 25 & 32 \\ 36 & 40 \end{bmatrix}$

09. Diketahui  $P = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 3 & -4x \end{bmatrix}$ ,  $Q = \begin{bmatrix} 5x & 12 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$  dan  $R = \begin{bmatrix} -10 & 8 \\ -4 & 6x \end{bmatrix}$ . Jika  $P - Q = R^{-1}$ , maka nilai dari  $6x = \dots$

- A. -3                      B. -1/2                      C. 1/2  
D. 3                      E. 6

10. Diketahui matriks  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$  dan  $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ . Maka matriks X yang memenuhi persamaan  $X = (A \times B)^{-1} \times B^{-1}$  adalah ...

- A.  $\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}$                       B.  $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$                       C.  $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$   
D.  $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$                       E.  $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 5 & -24 \end{bmatrix}$

11. Nilai  $2x - y$  dari persamaan matriks  $\begin{bmatrix} 5 & 3x \\ y-1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 1-2y \\ 2x & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$  adalah
- A.  $-7$  B.  $-1$  C.  $1$   
D.  $7$  E.  $8$
12. Diketahui matriks  $K = \begin{bmatrix} k & 1 \\ m & n \end{bmatrix}$ ,  $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \end{bmatrix}$ ,  $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  dan  $D = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ . Jika  $KA = B$ ,  $KC = D$  nilai dari  $K \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$  adalah ...
- A.  $\begin{bmatrix} -6 \\ 5 \end{bmatrix}$  B.  $\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}$  C.  $\begin{bmatrix} 6 \\ -15 \end{bmatrix}$   
D.  $\begin{bmatrix} 12 \\ -5 \end{bmatrix}$  E.  $\begin{bmatrix} -14 \\ 7 \end{bmatrix}$
13. Diketahui matriks  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$  dan  $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ . Matriks  $C$  berordo  $2 \times 2$  memenuhi  $AC = B$ , determinan matriks  $C$  adalah ...
- A.  $12$  B.  $11$  C.  $9$   
D.  $6$  E.  $1$

# M A T R I K S

## F. Invers Perkalian Matriks ordo (3 x 3)

Seperti yang telah diuraikan di atas, bahwa setiap matriks persegi mempunyai identitas perkalian (dilambangkan dengan I ) dan invers perkalian, sehingga berlaku :

Jika  $A^{-1}$  adalah invers dari matriks A, maka  $A^{-1} \times A = A \times A^{-1} = I$

Selanjutnya akan dibahas tentang matriks identitas dan invers perkalian matriks persegi ordo (3 x 3).

Matriks identitas perkalian ordo (3 x 3) adalah  $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  Sedangkan untuk

menentukan invers perkalian matriks (3 x 3) dapat dilakukan dengan dua cara, yaitu :

### (1) Dengan metoda mereduksi elemen baris.

Untuk menentukan invers matriks dengan metoda ini, dilakukan dengan cara :

Jika  $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$  maka invers matriks A didapat dengan cara mereduksi elemen

baris matriks A, sehingga :

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} a & b & c & 1 & 0 & 0 \\ d & e & f & 0 & 1 & 0 \\ g & h & i & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \quad \text{diubah menjadi} \quad \left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & p & q & r \\ 0 & 1 & 0 & s & t & u \\ 0 & 0 & 1 & v & w & x \end{array} \right|$$

dalam hal ini  $A^{-1} = \begin{bmatrix} p & q & r \\ s & t & u \\ v & w & x \end{bmatrix}$

Terdapat beberapa aturan dalam reduksi elemen baris, yaitu :

- (1) Setiap elemen baris dapat dikali (atau dibagi) dengan bilangan real
- (2) Setiap elemen baris dapat ditambah (atau dikurang) dengan elemen baris yang lain
- (3) Setiap elemen baris dapat ditukar posisi dengan baris lain

Untuk lebih jelasnya ikutilah contoh soal berikut ini :

01. Tentukanlah invers matriks  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 1 \end{bmatrix}$

Jawab

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} b_1 \times 2 \\ \\ \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ b_2 - b_1 \\ \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ b_2 \times 5 \\ \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -10 & 5 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ b_2 \times 5 \\ \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -10 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -10 & 5 & 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ \\ b_3 + b_2 \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -10 & 5 & 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} b_1 : 2 \\ b_2 : 5 \\ \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 11 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -10 & 5 & 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} b_1 - b_3 \\ \\ \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 11 & -5 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -10 & 5 & 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ b_2 \times 2 \\ \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -10 & 5 & 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} b_1 + b_2 \\ \\ \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -10 & 5 & 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ b_2 : 2 \\ \end{array}$$

$$\text{maka } A^{-1} = \begin{bmatrix} a & -3 & b \\ c & d & 0 \\ -10 & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -10 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

02. Tentukanlah invers matriks  $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

Jawab

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} b_1 \times 5 \\ \\ b_3 \times 3 \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} -5 & 10 & -15 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 12 & -6 & 15 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right| \begin{array}{l} b_1 + b_3 \\ \\ \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} 7 & 4 & 0 & 5 & 0 & 3 \\ 8 & 4 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 12 & -6 & 15 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ b_2 \times 4 \\ \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 5 & -4 & 3 \\ 8 & 4 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 12 & -6 & 15 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right| \begin{array}{l} b_1 - b_2 \\ \\ \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} -4 & 0 & 0 & 20 & -16 & 12 \\ 8 & 4 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} b_1 \times 4 \\ \\ b_3 : 3 \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} -4 & 0 & 0 & 20 & -16 & 12 \\ 8 & 4 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 20 & -16 & 13 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ \\ b_3 + b_1 \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & 10 & -8 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 20 & -16 & 13 \end{array} \right| \begin{array}{l} b_1 : 2 \\ b_2 : 4 \\ \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & 10 & -8 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 10 & -7 & 6 \\ 0 & -2 & 5 & 20 & -16 & 13 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ b_2 + b_1 \\ \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & 10 & -8 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 20 & -14 & 12 \\ 0 & -2 & 5 & 20 & -16 & 13 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ b_2 \times 2 \\ \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & 10 & -8 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 20 & -14 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 40 & -30 & 25 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ \\ b_3 + b_2 \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 10 & -7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -6 & 5 \end{array} \right| \begin{array}{l} b_1 : (-2) \\ b_2 : 2 \\ b_3 : 5 \end{array}$$

$$\text{maka } A^{-1} = \begin{bmatrix} a & 4 & b \\ c & d & 6 \\ 8 & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 4 & -3 \\ 10 & -7 & 6 \\ 8 & -6 & 5 \end{bmatrix}$$

## (2) Dengan menggunakan Minor-Kofaktor

Menentukan invers matriks dengan Minor-kofaktor ini, dilakukan dengan menggunakan konsep determinan (dilambangkan dengan *det*) dan konsep adjoint (dilambangkan dengan *adj*).

Misalkan  $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$  maka langkah-langkah menentukan invers matriks

dengan metoda ini adalah sebagai berikut :

1. Menentukan minor matriks A untuk baris p dan kolom q ( $M_{pq}$ )

$$M_{11} = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = b_2c_3 - c_2b_3$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_2c_3 - c_2a_3$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = a_2b_3 - b_2a_3$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = b_1c_3 - c_1b_3$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1c_3 - c_1a_3$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = a_1b_3 - b_1a_3$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = b_1c_2 - c_1b_2$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - c_1a_2$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - b_1a_2$$

2. Menentukan kofaktor matriks A

Kofaktor matriks A baris ke-p kolom ke-q dilambangkan  $C_{pq}$  ditentukan dengan rumus :

$$C_{pq} = (-1)^{p+q} M_{pq}$$

Sehingga diperoleh matriks kofaktor C sebagai berikut :

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{22} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

3. Menentukan determinan matriks A

Determinan matriks A ditulis  $\det(A)$  atau  $|A|$  ditentukan dengan rumus:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 \cdot c_3 + b_1 \cdot c_2 \cdot a_3 + c_1 \cdot a_2 \cdot b_3 - c_1 \cdot b_2 \cdot a_3 - a_1 \cdot c_2 \cdot b_3 - b_1 \cdot a_2 \cdot c_3$$

atau dengan menggunakan kofaktor  $C_{pq}$  dengan rumus :

$$\det(A) = a_1 C_{11} + b_1 C_{12} + c_1 C_{13}$$

$$\det(A) = a_2 C_{21} + b_2 C_{22} + c_2 C_{23}$$

$$\det(A) = a_3 C_{31} + b_3 C_{32} + c_3 C_{33}$$

4. Menentukan matriks adjoint A, yakni transpose dari kofaktor matriks A, atau dirumuskan :

$$\text{Adj } A = C^t$$

5. Menentukan invers matriks A dengan rumus :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj } A$$

Untuk lebih jelasnya ikutilah contoh soal berikut ini :

03. Tentukanlah Determinan matriks  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Jawab

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\det = (2)(2)(1) + (1)(3)(0) + (-2)(-1)(3) - (-2)(2)(0) - (2)(3)(3) - (1)(-1)(1)$$

$$\det = 4 + 0 + 6 - 0 - 18 + 1$$

$$\det = -7$$

04. Dengan menggunakan kofaktor, tentukanlah invers matriks  $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

Jawab

Langkah 1 (*menentukan minor matriks*)

$$M_{11} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (-3)(2) - (1)(2) = -6 - 2 = -8$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = (2)(2) - (1)(-1) = 4 + 1 = 5$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = (2)(2) - (-3)(-1) = 4 - 3 = 1$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (-5)(2) - (0)(2) = -10 - 0 = -10$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = (3)(2) - (0)(-1) = 6 - 0 = 6$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = (3)(2) - (-5)(-1) = 6 - 5 = 1$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} -5 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = (-5)(1) - (0)(-3) = -5 - 0 = -5$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (3)(1) - (0)(2) = 3 - 0 = 3$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = (3)(-3) - (-5)(2) = -9 + 10 = 1$$

Langkah 2 (*menentukan kofaktor matriks*)

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (1)(-8) = -8$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)(5) = -5$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = (1)(1) = 1$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = (-1)(-10) = 10$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = (1)(6) = 6$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = (-1)(1) = -1$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = (1)(-5) = -5$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = (-1)(3) = -3$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = (1)(1) = 1$$

Matriks kofaktornya :  $C = \begin{bmatrix} -8 & -5 & 1 \\ 10 & 6 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

Langkah 3 (*menentukan Determinan matriks*)

Menggunakan ekspansi baris pertama

$$\det(A) = a_{11} C_{11} + a_{12} C_{12} + a_{13} C_{13} = (3)(-8) + (-5)(-5) + (0)(1) = 1$$

Langkah 4 (*menentukan Adjoint matriks*)

Matriks kofaktor  $C = \begin{bmatrix} -8 & -5 & 1 \\ 10 & 6 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$  adjoin nya  $\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} -8 & 10 & 1 \\ -5 & 6 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Langkah 4 (*menentukan Invers matriks*)

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} -8 & 10 & 1 \\ -5 & 6 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -8 & 10 & 1 \\ -5 & 6 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

05. Dengan menggunakan kofaktor, tentukanlah invers matriks  $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

Jawab

Langkah 1 (*menentukan minor matriks*)

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (2)(1) - (1)(3) = 2 - 3 = -1$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (1)(1) - (1)(1) = 1 - 1 = 0$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (1)(3) - (2)(1) = 3 - 2 = 1$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (3)(1) - (3)(3) = 3 - 9 = -6$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (1)(1) - (3)(1) = 1 - 3 = -2$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (1)(3) - (1)(3) = 3 - 3 = 0$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (3)(1) - (3)(2) = 3 - 6 = -3$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (1)(1) - (3)(1) = 1 - 3 = -2$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (1)(2) - (3)(1) = 2 - 3 = -1$$

Langkah 2 (*menentukan kofaktor matriks*)

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (1)(-1) = -1$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)(0) = 0$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = (1)(1) = 1$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = (-1)(-6) = 6$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = (1)(2) = 2$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = (-1)(0) = 0$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = (1)(-3) = -3$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = (-1)(-2) = 2$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = (1)(-1) = -1$$

Matriks kofaktornya : 
$$C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Langkah 3 (*menentukan Determinan matriks*)

Menggunakan ekspansi baris pertama

$$\det(A) = a_{11} C_{11} + a_{12} C_{12} + a_{13} C_{13} = (1)(-1) + (3)(0) + (3)(1) = -1 + 0 + 3 = 2$$

Langkah 4 (*menentukan Adjoint matriks*)

$$\text{Matriks kofaktor } C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \text{ adjoin nya } \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Langkah 4 (*menentukan Invers matriks*)

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 6 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 3 & -3/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$

## **SOAL LATIHAN 06**

### **F. Invers Perkalian Matriks Ordo (3x3)**

01. Jika  $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$  dan  $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & 5 & b \\ c & d & 0 \\ e & 4 & f \end{bmatrix}$  maka nilai  $a + b + c + d + e + f = \dots$

A. -18

B. -9

C. 6

D. -2

E. -10

02. Jika  $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$  dan  $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & -5 & b \\ c & d & 5 \\ e & -1 & f \end{bmatrix}$  maka nilai  $a + b + c + d + e + f =$

A. 3

B. 7

C. 9

D. 10

E. 12

03. Jika  $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 4 & -3 \end{bmatrix}$  dan  $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & 1 & b \\ c & d & 8 \\ e & -13 & f \end{bmatrix}$  maka nilai  $a + b + c + d + e + f =$

A. 6

B. 7

C. 9

D. 10

E. 11

04. Jika  $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$  dan  $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & 2 & b \\ c & d & 1 \\ e & 1 & f \end{bmatrix}$  maka nilai  $a + b + c + d + e + f =$

A. 8

B. 6

C. 5

D. 3

E. 1

05. Jika matriks  $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & m \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$  adalah matriks singular, maka nilai  $m = \dots$

A. -4

B. -2

C. 2

D. 3

E. 6

# M A T R I K S

## G. Menyelesaikan Sistem Persamaan Linier Dengan Matriks

### (1) Sistem Persamaan Linier dua Variabel

Salah satu diantara penggunaan invers matriks adalah untuk menyelesaikan sistim persamaan linier. Tentu saja teknik penyelesaiannya dengan aturan persamaan matriks, yaitu :

$$\text{Jika } \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad \text{maka } \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Selain dengan persamaan matriks, teknik menyelesaikan sistem persamaan linier juga dapat dilakukan dengan determinan matriks. Aturan dengan cara ini adalah :

$$\text{Jika matriks } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{maka } \det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc. \text{ sehingga}$$

$$\text{Jika } \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad \text{maka } D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - b_1a_2$$

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - b_1c_2$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - c_1a_2$$

$$\text{Maka } x = \frac{D_x}{D} \quad \text{dan} \quad y = \frac{D_y}{D}$$

Untuk lebih jelasnya, ikutolah contoh soal berikut ini:

01. Tentukan penyelesaian sistem persamaan  $2x - 3y = 8$  dan  $x + 2y = -3$  dengan metoda:

(a) Invers matriks

(b) Determinan

Jawab

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 8 \\ x + 2y &= -3 \end{aligned} \quad \text{maka} \quad \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -3 \end{bmatrix}$$

(a) Dengan metoda invers matriks diperoleh

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{4 - (-3)} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 16 - 9 \\ -8 - 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 7 \\ -14 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Jadi  $x = 1$  dan  $y = -2$

(b) Dengan metoda determinan matriks diperoleh

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (2)(2) - (-3)(1) = 4 + 3 = 7$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = (8)(2) - (-3)(-3) = 16 - 9 = 7$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = (2)(-3) - (8)(1) = -6 - 8 = -14$$

$$\text{Maka } x = \frac{D_x}{D} = \frac{7}{7} = 1$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-14}{7} = -2$$

02. Tentukan penyelesaian sistem persamaan  $y = \frac{1}{2}x + 5$  dan  $x + 6 = \frac{2}{3}y$

dengan metoda:

(a) Invers matriks

(b) Determinan

Jawab

$$y = \frac{1}{2}x + 5 \quad (2) \longrightarrow 2y = x + 10 \longrightarrow -x + 2y = 10$$

$$x + 6 = \frac{2}{3}y \quad (3) \longrightarrow 3x + 18 = 2y \longrightarrow 3x - 2y = -18$$

$$-x + 2y = 10$$

$$3x - 2y = -18$$

Maka

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = (-1)(-2) - (2)(3) = 2 - 6 = -4$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 10 & 2 \\ -18 & -2 \end{vmatrix} = (10)(-2) - (2)(-18) = -20 - (-36) = 16$$

$$D_y = \begin{vmatrix} -1 & 10 \\ 3 & -18 \end{vmatrix} = (-1)(-18) - (10)(3) = 18 - 30 = -12$$

$$\text{Maka } x = \frac{D_x}{D} = \frac{16}{-4} = -4$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-12}{-4} = 3$$

03. Tentukan penyelesaian sistem persamaan  $2y - 3x = -4$  dan  $2x + y = 5$  dengan metoda:

(a) Invers matriks

(b) Determinan

Jawab

$$\begin{aligned} 2y - 3x = -4 &\longrightarrow 3x - 2y = 4 \\ x + 2y = -3 &\longrightarrow 2x + y = 5 \end{aligned} \quad \text{maka} \quad \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

(a) Dengan metoda invers matriks diperoleh

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \frac{1}{3 - (-4)} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 4 + 10 \\ -8 + 15 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 14 \\ 7 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Jadi  $x = 2$  dan  $y = 1$

(b) Dengan metoda determinan matriks diperoleh

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (3)(1) - (-2)(2) = 3 + 4 = 7$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = (4)(1) - (-2)(5) = 4 + 10 = 14$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = (3)(5) - (4)(2) = 15 - 8 = 7$$

$$\text{Maka } x = \frac{D_x}{D} = \frac{14}{7} = 2$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{7}{7} = 1$$

## (2) Sistem Persamaan Linier Tiga Variabel.

Seperti halnya pada sistem persamaan linier dua variabel, menyelesaikan sistem persamaan linier tiga variabel dengan matriks juga terdiri dari dua cara, yakni dengan menggunakan determinan matriks dan dengan menggunakan aturan invers perkalian matriks. Berikut ini akan diuraikan masing masing cara tersebut.

Aturan menyelesaikan sistem persamaan linier menggunakan determinan matriks adalah dengan menentukan terlebih dahulu matriks koefisien dari sistem persamaan itu.

Selanjutnya ditentukan empat nilai determinan sebagai berikut:

(1) D yakni determinan matriks koefisien

(2)  $D_x$  yakni determinan matriks koefisien dengan koefisien x diganti konstanta

(3)  $D_y$  yakni determinan matriks koefisien dengan koefisien y diganti konstanta

(4)  $D_z$  yakni determinan matriks koefisien dengan koefisien z diganti konstanta

Rumus masing-masingnya adalah sebagai berikut :

$$\text{Jika } \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \text{ diperoleh nilai determinan :}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 \cdot c_3 + b_1 \cdot c_2 \cdot a_3 + c_1 \cdot a_2 \cdot b_3 - c_1 \cdot b_2 \cdot a_3 - a_1 \cdot c_2 \cdot b_3 - b_1 \cdot a_2 \cdot c_3$$

$$D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = d_1 \cdot b_2 \cdot c_3 + b_1 \cdot c_2 \cdot d_3 + c_1 \cdot d_2 \cdot b_3 - c_1 \cdot b_2 \cdot d_3 - d_1 \cdot c_2 \cdot b_3 - b_1 \cdot d_2 \cdot c_3$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \cdot d_2 \cdot c_3 + d_1 \cdot c_2 \cdot a_3 + c_1 \cdot a_2 \cdot d_3 - c_1 \cdot d_2 \cdot a_3 - a_1 \cdot c_2 \cdot d_3 - d_1 \cdot a_2 \cdot c_3$$

$$D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 \cdot d_3 + b_1 \cdot d_2 \cdot a_3 + d_1 \cdot a_2 \cdot b_3 - d_1 \cdot b_2 \cdot a_3 - a_1 \cdot d_2 \cdot b_3 - b_1 \cdot a_2 \cdot d_3$$

Sehingga nilai  $x = \frac{D_x}{D}$ ,  $y = \frac{D_y}{D}$  dan  $z = \frac{D_z}{D}$

Untuk lebih jelasnya, ikutilah contoh soal berikut ini:

01. Tentukanlah himpunan penyelesaian sistem persamaan linier

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 3y + 2z = -3 \\ x + 2y + z = 2 \\ 2x - y + 3z = 1 \end{array} \right\} \text{ dengan menggunakan metoda determinan}$$

Jawab

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$D = (2)(2)(3) + (-3)(1)(2) + (2)(1)(-1) - (2)(2)(2) - (2)(1)(-1) - (-3)(1)(3)$$

$$D = 12 - 6 - 2 - 8 + 2 + 9$$

$$D = 7$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -3 & 2 & -3 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$D_x = (-3)(2)(3) + (-3)(1)(1) + (2)(2)(-1) - (2)(2)(1) - (-3)(1)(-1) - (-3)(2)(3)$$

$$D_x = -18 - 3 - 4 - 4 - 3 + 18$$

$$D_x = -14$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D_y = (2)(2)(3) + (-3)(1)(2) + (2)(1)(1) - (2)(2)(2) - (2)(1)(1) - (-3)(1)(3)$$

$$D_y = 12 - 6 + 2 - 8 - 2 + 9$$

$$D_y = 7$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -3 & -3 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$D_z = (2)(2)(1) + (-3)(2)(2) + (-3)(1)(-1) - (-3)(2)(2) - (2)(2)(-1) - (-3)(1)(1)$$

$$D_z = 4 - 12 + 3 + 12 + 4 + 3$$

$$D_z = 14$$

$$\text{Jadi } x = \frac{D_x}{D} = \frac{-14}{7} = -2$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{7}{7} = 1$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{14}{7} = 2$$

02. Tentukanlah himpunan penyelesaian sistem persamaan linier

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y + z = 2 \\ x - y - 2z = -1 \\ x + y - z = 3 \end{array} \right\} \text{ dengan menggunakan metoda determinan}$$

Jawab

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D = (1)(-1)(-1) + (2)(-2)(1) + (1)(1)(1) - (1)(-1)(1) - (1)(-2)(1) - (2)(1)(-1)$$

$$D = 1 - 4 + 1 + 1 + 2 + 2$$

$$D = 3$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$D_x = (2)(-1)(-1) + (2)(-2)(3) + (1)(-1)(1) - (1)(-1)(3) - (2)(-2)(1) - (2)(-1)(-1)$$

$$D_x = 2 - 12 - 1 + 3 + 4 - 2$$

$$D_x = -6$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$D_y = (1)(-1)(-1) + (2)(-2)(1) + (1)(1)(3) - (1)(-1)(1) - (1)(-2)(3) - (2)(1)(-1)$$

$$D_y = 1 - 4 + 3 + 1 + 6 + 2$$

$$D_y = 9$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D_z = (1)(-1)(3) + (2)(-1)(1) + (2)(1)(1) - (2)(-1)(1) - (1)(-1)(1) - (2)(1)(3)$$

$$D_z = -3 - 2 + 2 + 2 + 1 - 6$$

$$D_z = -6$$

$$\text{Jadi } x = \frac{D_x}{D} = \frac{-6}{3} = -2$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{9}{3} = 3$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{-6}{3} = -2$$

03. Tentukanlah himpunan penyelesaian sistem persamaan linier

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y = -3 \\ y + z = 1 \\ 2x + z = 1 \end{array} \right\} \quad \text{dengan menggunakan metoda determinan}$$

Jawab

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$D = (1)(1)(1) + (-2)(1)(2) + (0)(0)(0) - (0)(1)(2) - (1)(1)(0) - (-2)(0)(1)$$

$$D = (1) + (-4) + (0) - (0) - (0) - (0)$$

$$D = 1 - 4 + 0 + 0 + 0 + 0$$

$$D = -3$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 0 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$D_x = (-3)(1)(1) + (-2)(1)(1) + (0)(1)(0) - (0)(1)(1) - (-3)(1)(0) - (-2)(1)(1)$$

$$D_x = (-3) + (-2) + (0) - (0) - (0) - (-2)$$

$$D_x = -3 - 2 + 0 - 0 - 0 + 2$$

$$D_x = -3$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D_y = (1)(1)(1) + (-3)(1)(2) + (0)(0)(1) - (0)(1)(2) - (1)(1)(1) - (-3)(0)(1)$$

$$D_y = (1) + (-6) + (0) - (0) - (1) - (0)$$

$$D_y = 1 - 6 + 0 + 0 - 1 - 0$$

$$D_y = -6$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$D_z = (1)(1)(1) + (-2)(1)(2) + (-3)(0)(0) - (-3)(1)(2) - (1)(1)(0) - (-2)(0)(1)$$

$$D_z = (1) + (-4) + (0) - (-6) - (0) - (0)$$

$$D_z = 1 - 4 + 0 + 6 - 0 - 0$$

$$D_z = 3$$

$$\text{Jadi } x = \frac{D_x}{D} = \frac{-3}{-3} = 1$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-6}{-3} = 2$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{3}{-3} = -1$$

Untuk menyelesaikan sistem persamaan linier tiga variabel dengan invers matriks dilakukan dengan tahapan berikut ini :

$$\text{Jika } \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \text{ diperoleh persamaan matriks}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = C$$

$$B = A^{-1} \cdot C$$

Karena A adalah matriks koefisien berordo (3 x 3) maka  $A^{-1}$  adalah invers perkalian matriks berordo (3 x 3). Berikut ini tatacara menentukan invers matriks ordo (3 x 3)

$$\text{Misalkan } A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \text{ maka langkah-langkah menentukan invers matriks}$$

adalah sebagai berikut :

1. Menentukan minor matriks A untuk baris p dan kolom q ( $M_{pq}$ )

$$M_{11} = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = b_2c_3 - c_2b_3$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_2c_3 - c_2a_3$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = a_2b_3 - b_2a_3$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = b_1c_3 - c_1b_3$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1c_3 - c_1a_3$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = a_1b_3 - b_1a_3$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = b_1 c_2 - c_1 b_2$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 c_2 - c_1 a_2$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - b_1 a_2$$

2. Menentukan kofaktor matriks A

Kofaktor matriks A baris ke-p kolom ke-q dilambangkan  $C_{pq}$  ditentukan dengan rumus :

$$C_{pq} = (-1)^{p+q} M_{pq}$$

Sehingga diperoleh matriks kofaktor C sebagai berikut :

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

3. Menentukan determinan matriks A

Determinan matriks A ditulis ditentukan dengan menggunakan kofaktor  $C_{pq}$

dengan rumus :  $\det(A) = a_1 C_{11} - b_1 C_{12} + c_1 C_{13}$

$$\det(A) = a_2 C_{21} - b_2 C_{22} + c_2 C_{23}$$

$$\det(A) = a_3 C_{31} - b_3 C_{32} + c_3 C_{33}$$

4. Menentukan matriks adjoint A, yakni transpose dari kofaktor matriks A, atau dirumuskan :

$$\text{Adj } A = C^t$$

5. Menentukan invers matriks A dengan rumus :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj } A$$

Untuk lebih jelasnya, ikutilah contoh soal berikut ini:

04. Tentukanlah himpunan penyelesaian sistem persamaan linier

$$\left. \begin{array}{l} x + y - 2z = 2 \\ x - 3y + z = -3 \\ x - y + z = 1 \end{array} \right\} \text{ dengan menggunakan metoda inver matriks}$$

Jawab

Matriks koefisien untuk sistem persamaan linier diatas adalah :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ sehingga}$$

Pertama akan ditentukan minor matriks, yaitu

$$M_{11} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (-3)(1) - (1)(-1) = -3 + 1 = -2$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (1)(1) - (1)(1) = 1 - 1 = 0$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (1)(-1) - (-3)(1) = -1 + 3 = 2$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (1)(1) - (-2)(-1) = 1 - 2 = -1$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (1)(1) - (-2)(1) = 1 + 2 = 3$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (1)(-1) - (1)(1) = -1 - 1 = -2$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = (1)(1) - (-2)(-3) = 1 - 6 = -5$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (1)(1) - (-2)(1) = 1 + 2 = 3$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = (1)(-3) - (1)(1) = -3 - 1 = -4$$

Kemudian menentukan kofaktor matriks

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (1)(-2) = -2$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)(0) = 0$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = (1)(2) = 2$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = (-1)(-1) = 1$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = (1)(3) = 3$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = (-1)(-2) = 2$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = (1)(-5) = -5$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = (-1)(3) = -3$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = (1)(4) = 4$$

Matriks kofaktornya :  $C = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -5 & -3 & -4 \end{bmatrix}$

Setelah itu menentukan Determinan matriks menggunakan ekspansi baris pertama

$$\det(A) = a_{11} C_{11} + a_{12} C_{12} + a_{13} C_{13} = (-2)(1) + (0)(1) + (2)(-2) = -6$$

Berikutnya menentukan Adjoint matriks dari matriks kofaktor

Jika kofaktor  $C = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -5 & -3 & -4 \end{bmatrix}$  maka adjoinnya  $\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

Akhirnya dimasukkan kedalam rumus invers matriks:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) \text{ diperoleh } A^{-1} = \frac{1}{-6} \begin{bmatrix} -2 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan invers matriks, maka system persamaan linier diatas dielesaikan dengan persamaan matriks sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{-6} \begin{bmatrix} -2 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{-6} \begin{bmatrix} -12 \\ -12 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jadi diperoleh nilai  $x = 2$ ,  $y = 2$  dan  $z = -1$

05. Tentukanlah himpunan penyelesaian sistem persamaan linier

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 2y + 3z = 4 \\ -x + y + 3z = 1 \\ -2x + y + 2z = -3 \end{array} \right\} \text{ dengan menggunakan metoda inver matriks}$$

Jawab

Matriks koefisien untuk sistem persamaan linier diatas adalah :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ sehingga}$$

Pertama akan ditentukan minor matriks, yaitu

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (1)(2) - (1)(3) = 2 - 3 = -1$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = (-1)(2) - (3)(-2) = -2 + 6 = 4$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(1) - (1)(-2) = -1 + 2 = 1$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (2)(2) - (3)(1) = 4 - 3 = 1$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = (2)(2) - (3)(-2) = 4 + 6 = 10$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = (2)(1) - (2)(-2) = 2 + 4 = 6$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (2)(3) - (3)(1) = 6 - 3 = 3$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = (2)(3) - (3)(-1) = 6 + 3 = 9$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (2)(1) - (2)(-1) = 2 + 2 = 4$$

Kemudian menentukan kofaktor matriks

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (1)(-1) = -1$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)(4) = -4$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = (1)(1) = 1$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = (-1)(1) = -1$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = (1)(10) = 10$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = (-1)(6) = -6$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = (1)(3) = 3$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = (-1)(9) = -9$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = (1)(4) = 4$$

$$\text{Matriks kofaktornya : } C = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 1 \\ -1 & 10 & -6 \\ 3 & -9 & 4 \end{bmatrix}$$

Setelah itu menentukan Determinan matriks menggunakan ekspansi baris pertama

$$\det(A) = a_{11} C_{11} + a_{12} C_{12} + a_{13} C_{13} = (2)(-1) + (2)(-4) + (3)(1) = -7$$

Berikutnya menentukan Adjoint matriks dari matriks kofaktor

$$\text{Jika kofaktor } C = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 1 \\ -1 & 10 & -6 \\ 3 & -9 & 4 \end{bmatrix} \text{ maka adjoinnya } \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -4 & 10 & -9 \\ 1 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

Akhirnya dimasukkan kedalam rumus invers matriks:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) \text{ diperoleh } A^{-1} = \frac{1}{-7} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -4 & 10 & -9 \\ 1 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan invers matriks, maka system persamaan linier diatas dielesaikan dengan persamaan matriks sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{-7} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -4 & 10 & -9 \\ 1 & -6 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{-7} \begin{bmatrix} -14 \\ 21 \\ -14 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Jadi diperoleh nilai  $x = 2$ ,  $y = -3$  dan  $z = 2$

06. Tentukanlah himpunan penyelesaian sistem persamaan linier

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 2y - z = 3 \\ 3x + y + 2z = 7 \\ 2x + 3y + 4z = 8 \end{array} \right\} \text{ dengan menggunakan metoda inver matriks}$$

Jawab

Matriks koefisien untuk sistem persamaan linier diatas adalah :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ sehingga}$$

Pertama akan ditentukan minor matriks, yaitu

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (1)(4) - (2)(3) = 4 - 6 = -2$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (3)(4) - (2)(2) = 12 - 4 = 8$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (3)(3) - (1)(2) = 9 - 2 = 7$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (-2)(4) - (-1)(3) = -8 + 3 = -5$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (2)(4) - (-1)(2) = 8 + 2 = 10$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (2)(3) - (-2)(2) = 6 + 4 = 10$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-2)(2) - (-1)(1) = -4 + 1 = -3$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (2)(2) - (-1)(3) = 4 + 3 = 7$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (2)(1) - (-2)(3) = 2 + 6 = 8$$

Kemudian menentukan kofaktor matriks

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (1)(-2) = -2$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)(8) = -8$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = (1)(7) = 7$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = (-1)(-5) = 5$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = (1)(10) = 10$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = (-1)(10) = -10$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = (1)(-3) = -3$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = (-1)(7) = -7$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = (1)(8) = 8$$

$$\text{Matriks kofaktornya : } C = \begin{bmatrix} -2 & -8 & 7 \\ 5 & 10 & -10 \\ -3 & -7 & 8 \end{bmatrix}$$

Setelah itu menentukan Determinan matriks menggunakan ekspansi baris pertama

$$\det(A) = a_{11} C_{11} + a_{12} C_{12} + a_{13} C_{13} = (-2)(2) + (-8)(-2) + (7)(-1) = 5$$

Berikutnya menentukan Adjoint matriks dari matriks kofaktor

$$\text{Jika kofaktor } C = \begin{bmatrix} -2 & -8 & 7 \\ 5 & 10 & -10 \\ -3 & -7 & 8 \end{bmatrix} \text{ maka adjoinnya } \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} -2 & 5 & -3 \\ -8 & 10 & -7 \\ 7 & -10 & 8 \end{bmatrix}$$

Akhirnya dimasukkan kedalam rumus invers matriks:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) \text{ diperoleh } A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -2 & 5 & -3 \\ -8 & 10 & -7 \\ 7 & -10 & 8 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan invers matriks, maka system persamaan linier diatas diselesaikan dengan persamaan matriks sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -2 & 5 & -3 \\ -8 & 10 & -7 \\ 7 & -10 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 \\ -10 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Jadi diperoleh nilai  $x = 1$ ,  $y = -2$  dan  $z = 3$



08. Jika penyelesaian sistem persamaan linier :

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 3y - 2z = 6 \\ 2x + 4y - 3z = 2 \\ 2x - 3y + 2z = 6 \end{array} \right\} \text{ adalah } \{x_1, y_1, z_1\}, \text{ maka nilai } x_1 + y_1 + z_1 = \dots$$

- A. 1                      B. 2                      C. 3  
D. 4                      E. 5

09. Jika penyelesaian sistem persamaan linier :

$$\left. \begin{array}{l} 3x - 2y + 2z = 3 \\ 5x + y - 2z = 7 \\ x - 3y + 3z = 1 \end{array} \right\} \text{ adalah } \{x_1, y_1, z_1\}, \text{ maka nilai } x_1 + y_1 + z_1 = \dots$$

- A. -5  
D. 2
- B. -4  
E. 5
- C. -3

10. Jika penyelesaian sistem persamaan linier :

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y + z = -1 \\ 2x + y + 2z = 3 \\ 2x - y + 3z = 8 \end{array} \right\} \text{ adalah } \{x_1, y_1, z_1\}, \text{ maka nilai } x_1 + y_1 + z_1 = \dots$$

- A. 1                                      B. 2                                      C. 3  
D. 4                                      E. 5

11. Jika penyelesaian sistem persamaan linier :

$$\left. \begin{array}{l} 2x - y - 2z = 4 \\ x - 4y + 3z = -9 \\ x - 2y + z = -3 \end{array} \right\} \text{ adalah } \{x_1, y_1, z_1\}, \text{ maka nilai } x_1 + y_1 + z_1 = \dots$$

- A. 1                                      B. 2                                      C. 3  
D. 4                                      E. 5

12. Jika penyelesaian sistem persamaan linier :

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 3y - 2z = -4 \\ 3x - 5y - 4z = -4 \\ 2x + 2y - z = 3 \end{array} \right\} \text{ adalah } \{x_1, y_1, z_1\}, \text{ maka nilai } x_1 + y_1 + z_1 = \dots$$

- A. -5                      B. -3                      C. 2  
D. 4                        E. 6

13. Jika himpunan penyelesaian dari sistem :

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y = 2 \\ x - 3z = -7 \\ 2y + 3z = 5 \end{array} \right\} \text{ adalah } \{x_1, y_1, z_1\} \text{ maka nilai } x_1 \cdot y_1 \cdot z_1 = \dots$$

- A. 24  
D. -12
- B. 12  
E. -24
- C. -6