

MODUL **TRANSFORMASI GEOMETRI**



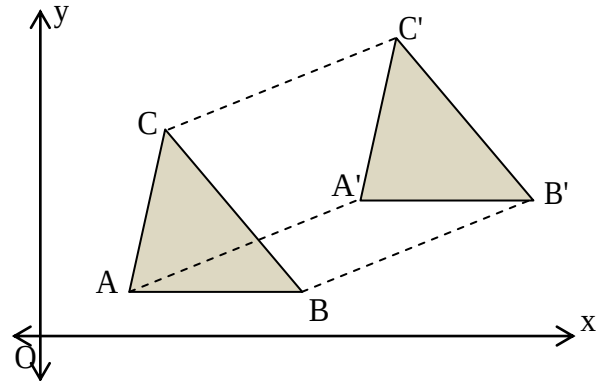
MATEMATIKA WAJIB
KELAS 11 MIPA/IPS

TRANSFORMASI

A. Macam-Macam Transformasi

1. Transformasi Pergeseran (Translasi)

Segitiga ABC pada gambar di samping digeser menjadi segitiga A'B'C'. Artinya setiap titik pada segitiga ABC tersebut digeser dengan jarak dan arah yang tetap sehingga diperoleh segitiga A'B'C'.



Transformasi yang berciri demikian dinamakan **pergeseran** atau **translasi**.

Sebuah titik $P(x,y)$ digeser sejauh $T = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ maka akan diperoleh bayangan $P'(x',y')$,

dan dirumuskan $x' = x + a$
 $y' = y + b$

Atau : $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

Untuk pemantapan lebih lanjut, ikutilah contoh soal berikut ini

01. Diketahui dua titik $A(-2, 3)$ dan $B(5, 1)$. Tentukanlah bayangan ruas garis AB jika ditranslasikan sejauh $T = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ dan gambarkan

Jawab

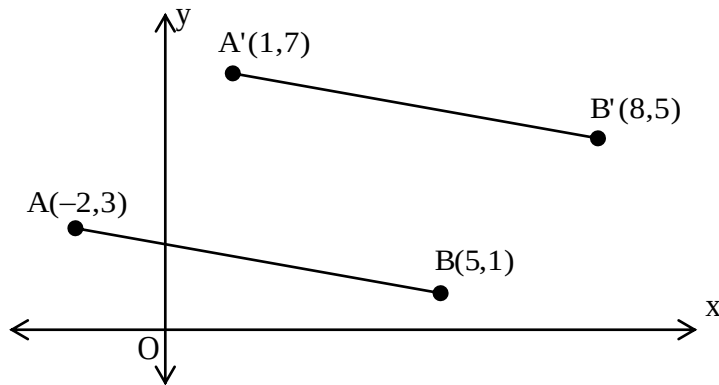
$$\begin{array}{llll} A(-2, 3) & \longrightarrow & A'(-2 + 3, 3 + 4) & \longrightarrow & A'(1, 7) \\ B(5, 1) & \longrightarrow & B'(5 + 3, 1 + 4) & \longrightarrow & B'(8, 5) \end{array}$$

Atau dengan matriks

$$\begin{aligned} \text{Titik A : } \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Titik B : } \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Translasi diatas dapat digambarkan sebagai berikut :



02. Jika titik $A(x, y)$ digeser sejauh $T = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$ maka akan menghasilkan bayangan

$A'(5, -2)$. Tentukanlah koordinat titik A tersebut

Jawab

$$\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Jadi $A(9, -5)$

03. Jika titik $A(x, y)$ digeser sejauh $T = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix}$ maka akan menghasilkan bayangan

$A'(8, 3)$. Tentukanlah koordinat titik A tersebut

04. Diketahui titik $A(3, -5)$ digeser sehingga diperoleh bayangan $A'(7, 2)$. Dengan translasi yang sama titik $B(-4, -8)$ akan bergeser menjadi B' . Tentukan koordinat B'

Jawab

$$\text{Titik A : } \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

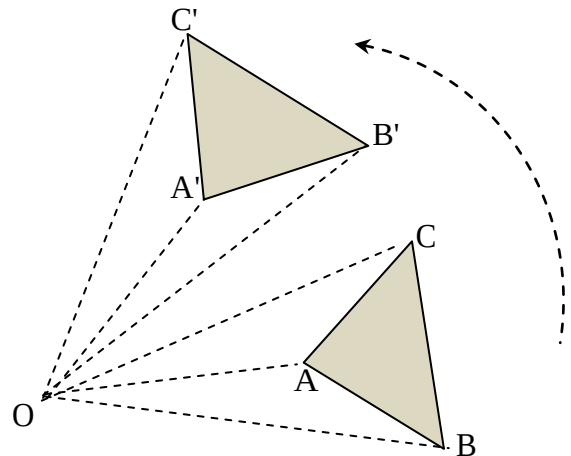
$$\begin{aligned}\text{Titik B : } \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -4 \\ -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -4 \\ -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Jadi koordinat titik B'(0, -1)

05. Diketahui titik A(-2, 4) digeser sehingga diperoleh bayangan A'(6, 9). Dengan translasi yang sama titik B(-5, 4) akan bergeser menjadi B'. Tentukanlah koordinat B'

2. Transformasi Perputaran (Rotasi)

Segitiga ABC pada gambar berikut ini diputar dengan pusat putaran di O(0, 0) dan sudut putar sejauh α , sehingga menjadi segitiga A'B'C'. Artinya setiap titik pada segitiga ABC tersebut diputar dengan pusat dan sudut putar yang tetap sehingga diperoleh segitiga A'B'C'.



Transformasi yang berciri demikian dinamakan **perputaran** atau **rotasi**.

Untuk α positif, maka perputarannya berlawanan arah jarum jam. Sedangkan untuk α negatif, maka perputarannya searah jarum jam

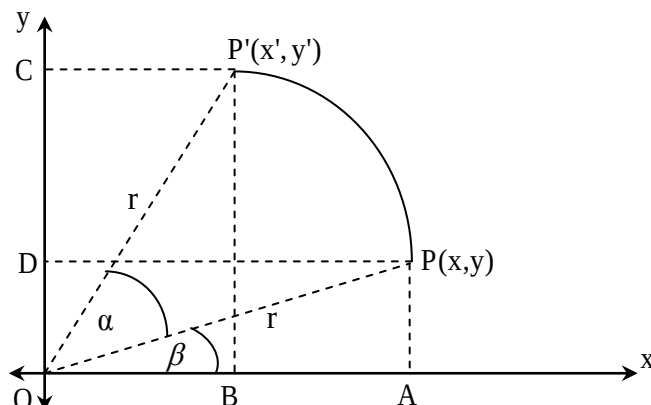
Sebuah titik P(x,y) diputar dengan pusat O(0, 0) sejauh α akan diperoleh bayangan P'(x',y') dimana :

$$x' = x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha$$

$$y' = x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha$$

$$\text{Atau : } \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Bukti:



Didalam segitiga OAP diperoleh hubungan : $OA = OP \cos \beta$ atau $x = r \cdot \cos \beta$
 $AP = OP \sin \beta$ atau $y = r \cdot \sin \beta$

Di dalam segitiga OBP diperoleh hubungan

(i) $OB = OP \cos (\beta + \alpha)$

$$x' = r \cdot \cos (\beta + \alpha)$$

$$x' = r \cos \beta \cdot \cos \alpha - r \sin \beta \cdot \sin \alpha$$

$$x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha$$

(ii) $BP = OP \sin (\beta + \alpha)$

$$y' = r \cdot \sin (\beta + \alpha)$$

$$y' = r \sin \beta \cdot \cos \alpha + r \cos \beta \cdot \sin \alpha$$

$$y' = y \cos \alpha + x \sin \alpha$$

Walaupun rumus di atas diturunkan dengan mengambil α sudut positif, tetapi dapat ditunjukkan bahwa berlaku untuk semua α (α positif atau α negatif)

Jika pusat putaran di $A(h, k)$ dan sudut putaran sejauh α , maka rumus menentukan

bayangannya dapat diturunkan dengan menggeser titik pusat $O(0, 0)$ sejauh $\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$

Sehingga jika titik $P(x, y)$ diputar dengan pusat $A(h, k)$ sejauh α akan diperoleh

bayangan $P'(x', y')$ dimana : $x' - h = (x - h) \cos \alpha - (y - k) \sin \alpha$

$$y' - k = (x - h) \sin \alpha + (y - k) \cos \alpha$$

$$\text{Atau : } \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - h \\ y - k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$$

Untuk pemantapan lebih lanjut, ikutilah contoh soal berikut ini

04. Tentukanlah bayangan titik $A(6, -4)$ jika diputar sejauh 135° dengan pusat $O(0, 0)$.

Jawab

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 135^\circ & -\sin 135^\circ \\ \sin 135^\circ & \cos 135^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 5\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Jadi titik $A'(-\sqrt{2}, 5\sqrt{2})$

05. Diketahui segitiga ABC dimana titik A(6, 2), B(1, 3) dan C(4, 6) diputar sejauh 90° dengan pusat O(0, 0). Tentukanlah koordinat titik bayangan segitiga tersebut

Jawab

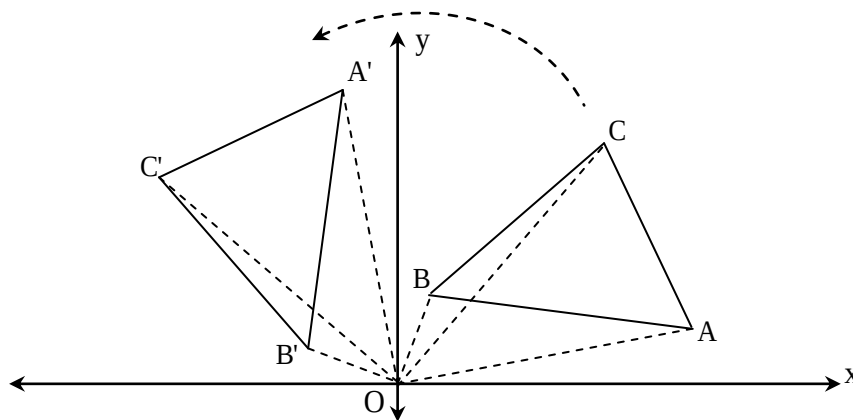
$$\begin{bmatrix} x'_A & x'_B & x'_C \\ y'_A & y'_B & y'_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'_A & x'_B & x'_C \\ y'_A & y'_B & y'_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'_A & x'_B & x'_C \\ y'_A & y'_B & y'_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -6 \\ 6 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Jadi titiknya A'(-2, 6), B'(-3, 1) dan C'(-6, 4)

Gambarnya



06. Sebuah titik A(x, y) dirotasikan dengan pusat O(0, 0) sejauh 45° , sehingga diperoleh bayangan A'(2√2, 6√2). Tentukanlah koordinat titik A

Jawab

Bayangan titik A(x, y) adalah A'(2√2, 6√2) dengan $\alpha = 45^\circ$

$$\begin{bmatrix} 2\sqrt{2} \\ 6\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2\sqrt{2} \\ 6\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\sqrt{2} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{(1)(1) - (-1)(1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4+12 \\ -4+12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{Jadi } A(8, 4)$$

07. Sebuah titik A(x, y) dirotasikan dengan pusat O(0, 0) sejauh 135° , sehingga diperoleh bayangan A'($-4\sqrt{2}$, $8\sqrt{2}$). Tentukanlah koordinat titik A

08. Tentukan bayangan titik P(4, $-6\sqrt{3}$) jika diputar sejauh $1/3$ putaran berlawanan arah jarum jam dengan pusat O(0, 0)

Jawab

α Bernilai positif karena perputaran berlawanan arah jarum jam

$$\alpha = \frac{1}{3}(360^\circ) = 120^\circ$$

$$\text{Maka } x' = x \cdot \cos 120^\circ - y \cdot \sin 120^\circ$$

$$x' = (4) \cdot \cos 120^\circ - (-6\sqrt{3}) \cdot \sin 120^\circ$$

$$x' = (4) \left(-\frac{1}{2}\right) + (6\sqrt{3}) \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$$

$$x' = (-2) + (3)(3)$$

$$x' = 7$$

$$y' = x \cdot \sin 120^\circ + y \cdot \cos 120^\circ$$

$$y' = (4) \cdot \sin 120^\circ + (-6\sqrt{3}) \cdot \cos 120^\circ$$

$$y' = (4) \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) + (-6\sqrt{3}) \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$y' = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3}$$

$$y' = 5\sqrt{3}$$

Jadi titiknya P'(-7 , $5\sqrt{3}$)

09. Tentukan bayangan titik P($-2\sqrt{3}$, -4) jika diputar sejauh $2/3$ putaran berlawanan arah jarum jam dengan pusat O(0, 0)

10. Jika titik $P(5, -7)$ dirotasikan sejauh 180° dengan pusat $A(3, 1)$ sehingga diperoleh bayangan P' . Tentukanlah koordinat P'

Jawab

Diketahui $P(5, -7)$

Pusat $A(3, 1)$

$$\alpha = 180^\circ$$

Maka $x' - h = (x - h)\cos 180^\circ - (y - k)\sin 180^\circ$

$$x' - 3 = (5 - 3)\cos 180^\circ - (-7 - 1)\sin 180^\circ$$

$$x' - 3 = (2)(-1) - (-8)(0)$$

$$x' - 3 = -2 + 0$$

$$x' = 1$$

$$y' - k = (x - h)\sin 180^\circ + (y - k)\cos 180^\circ$$

$$y' - 1 = (5 - 3)\sin 180^\circ + (-7 - 1)\cos 180^\circ$$

$$y' - 1 = (2)(0) + (-8)(-1)$$

$$y' - 1 = 0 + 8$$

$$y' - 1 = 8$$

$$y' = 9$$

Jadi titiknya $P'(1, 9)$

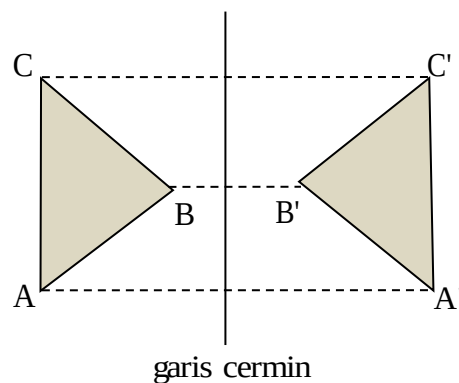
11. Jika titik $P(-3, 4)$ dirotasikan sejauh 270° dengan pusat $A(2, 5)$ sehingga diperoleh bayangan P' . Tentukanlah koordinat P'

3. Transformasi Pencerminkan (Refleksi)

Segitiga ABC pada gambar di samping dicerminkan terhadap garis tertentu menjadi segitiga $A'B'C'$.

Pada pencerminan ini segitiga asal ABC akan berhadapan dengan segitiga bayangan $A'B'C'$.

Transformasi yang berciri demikian dinamakan **pencerminkan** atau **refleksi**.



Terdapat beberapa macam jenis pencerminan, tergantung pada posisi garis cerminnya, yaitu:

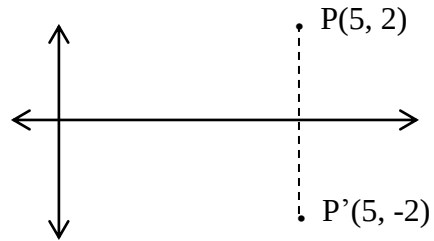
a. Pencerminkan terhadap sumbu x

Misalkan $P'(x', y')$ merupakan bayangan hasil pencerminan titik $P(x, y)$ terhadap sumbu X, maka dirumuskan : $x' = x$

$$y' = -y$$

Atau :
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Misalkan titik $P(5, 2)$ dicerminkan terhadap sumbu X, maka bayangannya adalah $P'(5, -2)$



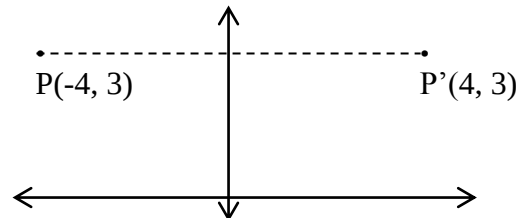
b. Pencerminkan terhadap sumbu Y

Misalkan $P'(x', y')$ merupakan bayangan hasil pencerminan titik $P(x, y)$ terhadap sumbu Y, maka dirumuskan : $x' = -x$

$$y' = y$$

Atau :
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Misalkan titik $P(-4, 3)$ dicerminkan terhadap sumbu Y, maka bayangannya adalah $P'(4, 3)$

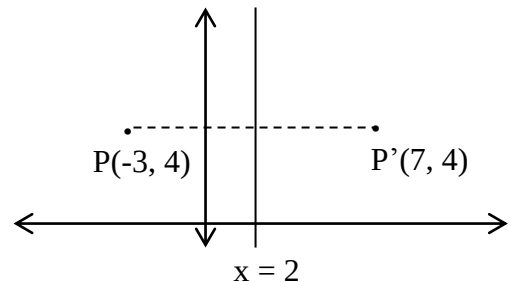


c. Pencerminkan terhadap garis $x = a$

Misalkan $P'(x', y')$ merupakan bayangan hasil pencerminan titik $P(x, y)$ terhadap garis $x = a$ maka dirumuskan : $x' = 2a - x$

$$y' = y$$

Misalkan titik $P(-3, 4)$ dicerminkan terhadap garis $x = 2$, maka bayangannya adalah $P'(7, 4)$

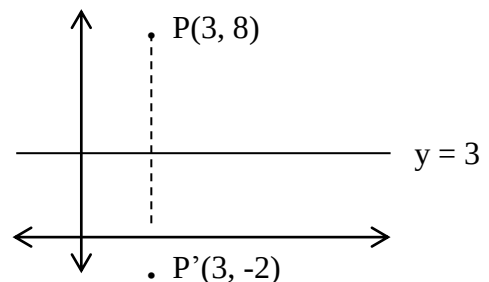


d. Pencerminkan terhadap garis $y = b$

Misalkan $P'(x', y')$ merupakan bayangan hasil pencerminan titik $P(x, y)$ terhadap garis $y = b$, maka dirumuskan : $x' = x$

$$y' = 2b - y$$

Misalkan titik $P(3, 8)$ dicerminkan terhadap garis $y = 3$, maka bayangannya adalah $P'(3, -2)$

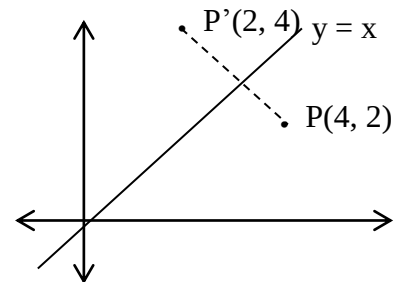


- e. Pencermian terhadap garis $y = x$

Misalkan $P'(x', y')$ merupakan bayangan hasil pencerminan titik $P(x, y)$ terhadap garis $y = x$, maka dirumuskan : $x' = y$
 $y' = x$

Atau :
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Misalkan titik $P(4, 2)$ dicerminkan terhadap garis $y = x$, maka bayangannya adalah $P'(2, 4)$

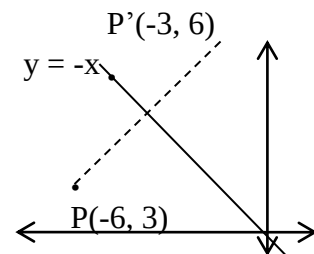


- f. Pencermian terhadap garis $y = -x$

Misalkan $P'(x', y')$ merupakan bayangan hasil pencerminan titik $P(x, y)$ terhadap garis $y = -x$, maka dirumuskan : $x' = -y$
 $y' = -x$

Atau :
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Misalkan titik $P(-6, 3)$ dicerminkan terhadap garis $y = -x$, maka bayangannya adalah $P'(-3, 6)$

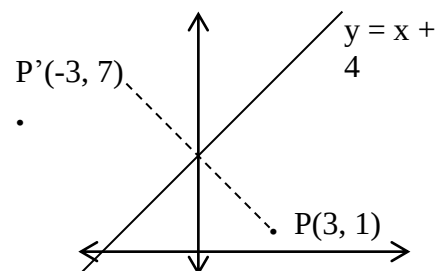


- g. Pencermian terhadap garis $y = x + a$

Misalkan $P'(x', y')$ merupakan bayangan hasil pencerminan titik $P(x, y)$ terhadap garis $y = x + a$, maka dirumuskan : $x' = y - a$

$$y' = x + a$$

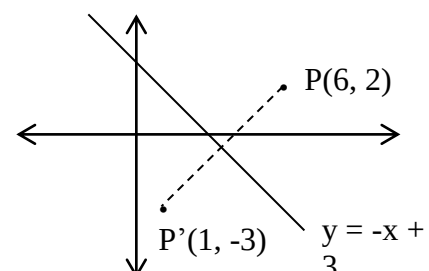
Misalkan titik $P(3, 1)$ dicerminkan terhadap $y = x + 4$, maka bayangannya adalah $P'(-3, 7)$



- h. Pencermian terhadap garis $y = -x + a$

Jika (x', y') merupakan bayangan hasil pencerminan titik $P(x, y)$ terhadap garis $y = -x + a$, maka dirumuskan : $x' = -y + a$
 $y' = -x + a$

Misalkan titik $P(6, 2)$ dicerminkan terhadap $y = -x + 3$, maka bayangannya adalah $P'(1, -3)$



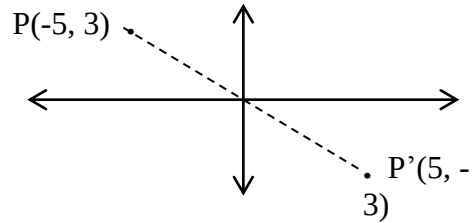
- i. Pencermian terhadap titik asal $O(0, 0)$

Misalkan $P'(x', y')$ merupakan bayangan hasil pencerminan titik $P(x, y)$ terhadap titik $O(0, 0)$ maka dirumuskan :

$$\begin{aligned}x' &= -x \\y' &= -y\end{aligned}$$

atau
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Misalkan titik $P(-5, 3)$ dicerminkan terhadap $y = x + 4$, maka bayangannya adalah $P'(5, -3)$



Untuk pemantapan lebih lanjut, ikutilah contoh soal berikut ini

09. Diketahui titik $A(-5, 1)$ dan $B(-2, 6)$. Tentukanlah bayangan titik A dan B oleh refleksi terhadap sumbu-Y serta gambarkan ruas garis AB dan bayangannya
Jawab

$A(-5, 1)$ bayangannya $A'(5, 1)$ $B(-2, 6)$ bayangannya $B'(2, 6)$

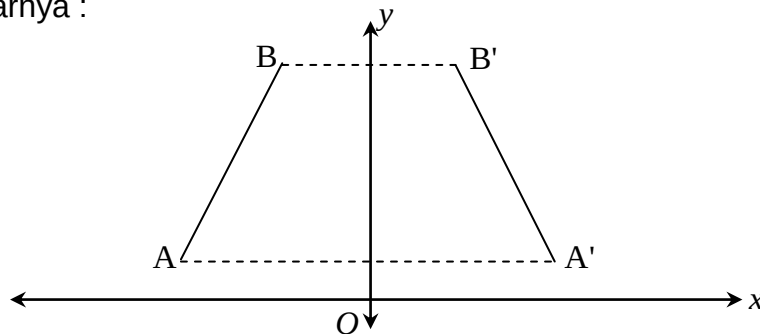
Dengan matriks :

$$\begin{bmatrix} x'_A & x'_B \\ y'_A & y'_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'_A & x'_B \\ y'_A & y'_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Jadi bayangannya adalah $A'(5, 1)$ dan $B'(2, 6)$

Gambarnya :



10. Tentukanlah bayangan titik $A(4, 3)$ oleh pencerminan terhadap garis $y = -1$

Jawab

Misalkan $A'(x', y')$ adalah bayangan titik $A(4, 3)$ oleh pencerminan terhadap garis $y = -1$

Maka :

$$\begin{aligned}x' &= x = 4 \\y' &= 2(-1) - y \\&= -2 - 3 \\&= -5\end{aligned}$$

Jadi bayangannya adalah $A'(4, -5)$

11. Jika titik $A(5, -3)$ dicerminkan terhadap garis $x = a$ maka diperoleh bayangan titik $A'(1, -3)$. Tentukanlah nilai a

Jawab

Misalkan $A'(1, -3)$ adalah bayangan titik $A(5, -3)$ oleh pencerminan terhadap garis $x = a$

$$\text{Maka : } x' = 2a - x$$

$$1 = 2a - 5$$

$$1 + 5 = 2a$$

$$\text{Jadi } a = 3$$

12. Sebuah titik $A(x, y)$ dicerminkan terhadap garis $y = -x$ sehingga diperoleh bayangan $A'(-5, 3)$. Tentukan koordinat titik A

Jawab

$$\begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

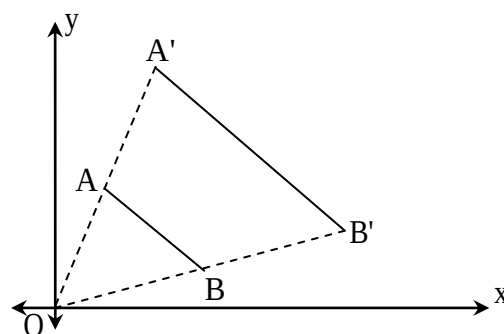
$$\frac{1}{0-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$(-1) \begin{bmatrix} 0+3 \\ -5+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \text{Jadi } A(-3, 5)$$

4. Transformasi Perkalian (Dilatasi)

Sebuah garis AB seperti pada gambar di samping didilatasi dengan pusat $O(0, 0)$ dan skala 2 sehingga didapat bayangan garis $A'B'$. Pada dilatasi ini garis $A'B'$, panjangnya menjadi dua kali panjang garis AB .



Transformasi yang berciri demikian dinamakan **perkalian** atau **dilatasi**.

Sebuah titik $P(x, y)$ didilatasi dengan pusat $O(0, 0)$ dan skala k akan menghasilkan bayangan $P'(x', y')$ dimana : $x' = k.x$

$$y' = k.y$$

$$\text{Atau : } \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Sedangkan jika titik $P(x, y)$ dilatasi dengan pusat $A(m, n)$ dan skala k akan menghasilkan bayangan $P'(x', y')$

dimana : $x' = k(x - m) + m$

$y' = k(y - n) + n$

atau
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - m \\ y - n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$$

Rumus di atas didapat dengan melakukan pergeseran titik pusat dari titik $A(m, n)$ ke titik $O(0, 0)$ dan kembali ke $A(m, n)$

Untuk pemantapan lebih lanjut, ikutilah contoh soal berikut ini

13. Tentukanlah bayangan garis AB jika titik $A(2, 5)$ dan $B(6, 1)$ diperbesar dengan pusat $O(0, 0)$ dan faktor skala 2 serta gambarkan

Jawab

$A(2, 5)$ bayangannya $A'(4, 10)$

$B(6, 1)$ bayangannya $B'(12, 2)$

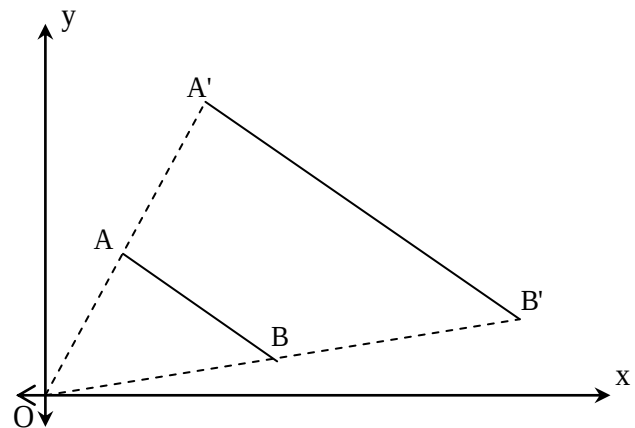
Dengan matriks :

$$\begin{bmatrix} x'_A & x'_B \\ y'_A & y'_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'_A & x'_B \\ y'_A & y'_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}$$

Jadi bayangannya adalah

$A'(4, 10)$ dan $B'(12, 1)$



14. Tentukanlah bayangan segitiga ABC jika titik $A(-1, 4)$, $B(4, 2)$ dan $C(2, 5)$ dilatasi dengan pusat $O(0, 0)$ dan faktor skala -2 serta gambarkan

Jawab

$A(-1, 4)$ bayangannya $A'(2, -8)$

$B(4, 2)$ bayangannya $B'(-8, -4)$

$C(2, 5)$ bayangannya $C'(-4, -10)$

Dengan matriks :

$$\begin{bmatrix} x'_A & x'_B & x'_C \\ y'_A & y'_B & y'_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{bmatrix}$$

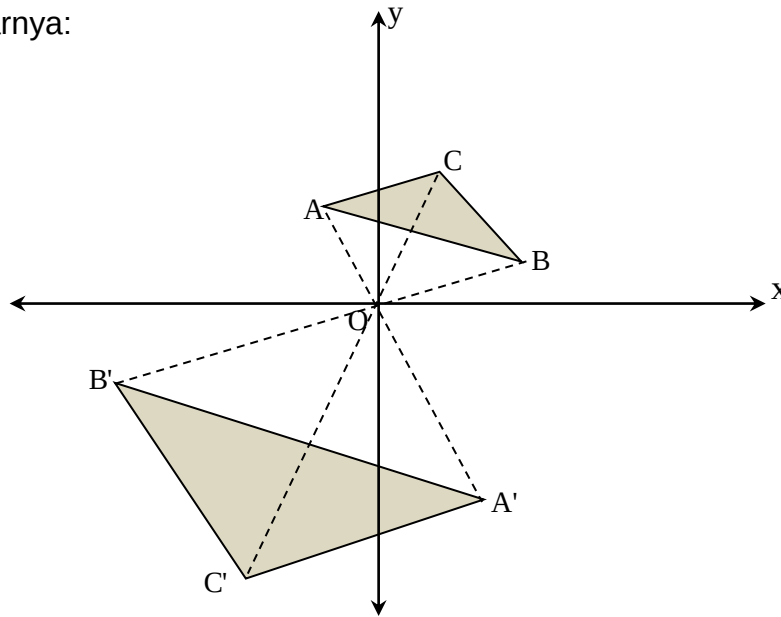
$$\begin{bmatrix} x'_A & x'_B & x'_C \\ y'_A & y'_B & y'_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'_A & x'_B & x'_C \\ y'_A & y'_B & y'_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+0 & -8+0 & -4+0 \\ 0-8 & 0-4 & 0-10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'_A & x'_B & x'_C \\ y'_A & y'_B & y'_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -8 & -4 \\ -8 & -4 & -10 \end{bmatrix}$$

Jadi bayangannya adalah $A'(2, -8)$ dan $B'(-8, -4)$, $C'(-4, -10)$

Gambarnya:



14. Tentukanlah bayangan segitiga ABC jika titik $A(-2, 5)$, $B(4, 1)$ dan $C(2, 3)$ didilatasi dengan pusat $O(0, 0)$ dan faktor skala -3 serta gambarkan

15. Jika titik $P(9, -6)$ didilatasi dengan skala k dan pusat $O(0, 0)$ sehingga diperoleh bayangan $P'(a, 4)$ maka tentukanlah nilai a

Jawab

Misalkan $P'(a, 4)$ adalah bayangan titik $P(9, -6)$ oleh dilatasi dengan pusat $O(0, 0)$ dan skala k

Maka : $x' = kx$

$y' = ky$

$$a = 9k \dots \dots \dots (1) \quad 4 = k(-6)$$

$$k = -2/3 \dots \dots \dots (2)$$

Dari (1) dan (2) diperoleh : $a = 9(-2/3) = -6$

16. Jika titik $P(-3, 5)$ didilatasi dengan skala k dan pusat $O(0, 0)$ sehingga diperoleh bayangan $P'(9, a)$ maka tentukanlah nilai a

17. Titik $P(2, -5)$ diperbesar dengan skala -3 dan pusat $A(1, 3)$ sehingga didapat bayangan P' . Tentukanlah koordinat P'

Jawab

Misalkan $P'(x', y')$ adalah bayangan titik $P(2, -5)$ oleh dilatasi dengan pusat $A(1, 3)$ dan skala -3 , dimana :

$$x' = k(x - m) + m$$

$$y' = k(y - n) + n$$

$$x' = -3(2 - 1) + 1$$

$$y' = -3(-5 - 3) + 3$$

$$x' = -2$$

$$y' = 27$$

Jadi titik bayangannya $P'(-2, 27)$

18. Titik $P(-4, 3)$ diperbesar dengan skala -2 dan pusat $A(2, 1)$ sehingga didapat bayangan P' . Tentukanlah koordinat P'
19. Sebuah titik $P(2, -5)$ diperbesar dengan skala k dan pusat $A(3, 2)$ sehingga didapat bayangan $P'(-1, -26)$. Tentukanlah nilai k

Jawab

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - m \\ y - n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 - 3 \\ -5 - 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -26 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 \\ -28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 \\ -28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k \\ -7k \end{bmatrix} \quad \text{Maka : } -k = -4 \quad k = 4$$

20. Sebuah titik $P(-3, 2)$ diperbesar dengan skala k dan pusat $A(4, -6)$ sehingga didapat bayangan $P'(-17, 18)$. Tentukanlah nilai k

08. Matriks yang bersesuaian dengan rotasi sejauh $\frac{4}{3}\pi$ dengan pusat O(0, 0) adalah

A. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{bmatrix}$

E. $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

09. Bayangan titik P(2, 6) jika diputar sejauh $\frac{1}{8}$ putaran dengan arah berlawanan jarum jam dan pusat O(0, 0) adalah

A. $(-2\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$

B. $(-\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$

C. $(2\sqrt{2}, -6\sqrt{2})$

D. $(\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$

E. $(\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$

10. Matriks $\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{bmatrix}$ bersesuaian dengan rotasi sejauh α dan berpusat di O(0, 0).

Nilai α adalah

A. 30°

B. 60°

C. 150°

D. 210°

E. 330°

11. Sebuah titik P (-5, 10) dirotasikan sejauh α dengan pusat O(0, 0) sehingga diperoleh bayangan P'. Jika diketahui $\cos \alpha = 3/5$ dalam interval $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, maka koordinat titik P adalah ...

A. (-14, 10)

B. (15, 3)

C. (10, -5)

D. (-11, 2)

E. (12, -8)

12. Bayangan titik Q(6, 5) oleh rotasi dengan pusat B(-5, 1) sejauh 270° adalah ...

A. (-1, 10)

B. (-11, -10)

C. (-1, -10)

D. (-11, 0)

E. (-1, 0)

13. Bayangan titik R(x, y) oleh rotasi dengan pusat di A(1, 4) sejauh 90° adalah R' (2, -3). Maka koordinat R adalah ...

A. (-6, 3)

B. (5, -2)

C. (6, -4)

D. (3, -2)

E. (5, -3)

14. Bayangan titik A(4, 1) dan B(-3, 2) jika direfleksikan terhadap sumbu y adalah ...
 A. A'(-4, 1) dan B'(3, -2) B. A'(4, -1) dan B'(-3, -2)
 C. A'(-4, 1) dan B'(3, 2) D. A'(1, -4) dan B'(-2, 3)
 E. A'(-4, -1) dan B'(3, -2)
15. Sebuah titik P dicerminkan terhadap garis $y = -x$ sehingga diperoleh bayangan P'(-6, 2). Koordinat P adalah ...
 A. P(2, 6) B. P(6, -2) C. P(2, -6)
 D. P(-2, -6) E. P(-2, 6)
16. Bayangan titik P(3, -2) oleh dilatasi dengan faktor skala -2 dan pusat O(0, 0) adalah
 A. (-6, 4) B. (6, -4) C. (4, -6)
 D. (-4, 6) E. (-4, -6)
17. Sebuah titik A(-12, 8) didilatasi dengan pusat O(0, 0) dan faktor skala k sehingga diperoleh bayangan A'(3, -2). Nilai k = ...
 A. -1/4 B. -1/2 C. 2
 D. 4 E. 6
18. Sebuah titik M(a, 3) didilatasi dengan pusat O(0, 0) dan faktor skala k sehingga diperoleh bayangan M'(6, -2). Nilai a = ...
 A. -9 B. -5 C. 2
 D. 4 E. 8
19. Sebuah titik C(2/3, 1) didilatasi dengan pusat O(0, 0) dan faktor skala k sehingga diperoleh peta C'(4, 6). Dengan pusat dan skala yang sama, titik D(5/6, -2) akan berubah menjadi D'. Koordinat D' adalah
 A. (5, -12) B. (10, -6) C. (-5, 12)
 D. (-10, 6) E. (10, -24)
20. Jika titik P(6, -4) didilatasi dengan pusat (1, 2) dan skala 2. Koordinat bayangannya adalah
 A. (7, 10) B. (-9, 8) C. (10, 8)
 D. (11, -10) E. (8, -11)
21. Titik P(-3, 4) ditransformasikan dengan matriks $\begin{pmatrix} a-2 & -1 \\ a & 3 \end{pmatrix}$ menghasilkan bayangan P'(8, 18). Sedangkan titik Q(-2, -1) ditransformasikan dengan matriks yang sama akan menghasilkan bayangan ...
 A. (9, 1) B. (1, 9) C. (-1, 9)
 D. (-9, -1) E. (-9, -7)

- 18

29. Titik A(x, y) ditransformasikan oleh matriks $T = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ menghasilkan bayangan titik

A'(2, 4). Koordinat A adalah ...

A. (7, 0)

B. (-3, 8)

C. (6, -1)

D. (-3, 0)

E. (8, -14)

TRANSFORMASI

B. Komposisi Transformasi

Komposisi transformasi merupakan susunan bererapa transformasi yang operasinya disusun menurut aturan komposisi

$$\begin{aligned}\text{Sehingga } (\text{Tran1 o Tran2})(x, y) &= [\text{Tran1} (\text{tran2} (x,y))] \\ &= [\text{Tran1} (x', y')] \\ &= (x'', y'')\end{aligned}$$

Untuk pemantapan lebih lanjut, ikutilah contoh soal berikut ini

01. Diketahui translasi $T_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$ dan $T_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$. Tentukanlah bayangan titik $P(5, -3)$

oleh $(T_1 \circ T_2)$

Jawab

$$\begin{aligned}(T_1 \circ T_2)(5, -3) &= T_1 [T_2(5, -3)] \\ &= T [(5 + 1, -3 + 3)] \\ &= T (6, 0) \\ &= (6 + (-2), 0 + 4) \\ &= (4, 4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Atau : } (T_1 \circ T_2)(5, -3) &= \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ Jadi titiknya } P'(4, 4)\end{aligned}$$

02. Diketahui translasi $T_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$ dan $T_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Tentukanlah bayangan titik $P(-6, 3)$

oleh $(T_2 \circ T_1)$

03. Diketahui translasi $T = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ dan M_1 yaitu pencerminan terhadap garis $y = x$.

Tentukanlah bayangan titik $P(-4, 1)$ oleh $T \circ M_1$

Jawab

$$\begin{aligned}(T \circ M_1)(-4, 1) &= T [M_1(-4, 1)] \\ &= T (1, -4) \\ &= (1 + 3, -4 + 5) \\ &= (4, 1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Atau } (T \circ M_1)(-4, 1) &= \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{Jadi titiknya } P'(4, 1)
\end{aligned}$$

04. Diketahui translasi $T = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$ dan M_1 yaitu pencerminan terhadap garis $y = -x$.

Tentukanlah bayangan titik $P(-5, 3)$ oleh $T \circ M_1$

05. Jika M_1 adalah pencerminan terhadap garis $x = 2$ dan M_2 adalah pencerminan terhadap garis $x = 4$, maka tentukanlah bayangan titik $A(5, -2)$ oleh transformasi M_2 dilanjutkan dengan M_1

Jawab

$$\begin{aligned}
(M_1 \circ M_2)(5, -2) &= M_1 [M_2(5, -2)] \\
&= M_1 [(2(4) - 5, -2)] \\
&= M_1 [(3, -2)] \\
&= [(2(2) - 3, -2)] \\
&= (1, -2)
\end{aligned}$$

Cara lain, dengan menggunakan aturan komposisi dua refleksi, yakni refleksi terhadap garis $x = a$ dan refleksi terhadap garis $x = b$

$$(M_{x=b} \circ M_{x=a})(x, y) = (2(b - a) + x, y)$$

$$\begin{aligned}
\text{Bukti } (M_{x=b} \circ M_{x=a})(x, y) &= M_{x=b} [M_{x=a}(x, y)] \\
&= M_{x=b} [(2a - x, y)] \\
&= (2b - (2a - x), y) \\
&= (2(b - a) + x, y)
\end{aligned}$$

Dengan cara yang sama diperoleh rumus aturan komposisi refleksi terhadap garis $y = a$ dan garis $y = b$, yakni $(M_{y=a} \circ M_{y=b})(x, y) = (x, 2(a - b) + y)$

Sehingga untuk titik $A(5, -2)$ dicerminkan terhadap garis $x = 4$ dilanjutkan pada garis $x = 2$, diperoleh bayangan :

$$\begin{aligned}
(M_{x=2} \circ M_{x=4})(5, -2) &= (2(2 - 4) + 5, -2) \\
&= (2(-2) + 5, -2) \\
&= (1, -2)
\end{aligned}$$

06. Jika M_1 adalah pencerminan terhadap garis $x = 3$ dan M_2 adalah pencerminan terhadap garis $x = -2$, maka tentukanlah bayangan titik $A(6, -4)$ oleh transformasi M_2 dilanjutkan dengan M_1

07. Tentukanlah bayangan titik (4, 3) oleh pencerminan terhadap garis $y = -x$ dilanjutkan oleh dilatasi dengan pusat $O(0, 0)$ dan skala -2

Jawab

$$\begin{aligned}(D_{(0,-2)} \circ M_{y=-x})(4, 3) &= D_{(0,-2)} [M_{y=-x} (4, 3)] \\&= D_{(0,-2)} [(-3, -4)] \\&= (-2(-3), -2(-4)) \\&= (6, 8)\end{aligned}$$

Atau dengan matriks
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-0 & 2+0 \\ 0+2 & 0+0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \text{Jadi bayangannya } (6, 8)$$

08. Tentukanlah bayangan titik $(-8, 4)$ oleh rotasi dengan pusat $O(0, 0)$ dan sudut 45° dilanjutkan rotasi dengan pusat yang sama dengan sudut 135° .

Jawab

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 135^\circ & -\sin 135^\circ \\ \sin 135^\circ & \cos 135^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \frac{1}{4}(2) \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1-1 & 1-1 \\ 1-1 & -1-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \end{bmatrix} \quad \text{Jadi bayangannya } (8, -4)$$

Cara lain, dengan menggunakan aturan komposisi dua rotasi, yakni

$$(R_{(O,\alpha)} \circ R_{(O,\beta)})(x, y) = R_{(O,\alpha+\beta)}$$

Bukti :

$$\begin{aligned} (R_{(O,\alpha)} \circ R_{(O,\beta)})(x, y) &= \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta & (\cos \alpha)(-\sin \beta) + (-\sin \alpha)(\cos \beta) \\ \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta & (\sin \alpha)(-\sin \beta) + (\cos \alpha)(\cos \beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta & -\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta \\ \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= R_{(O,\alpha+\beta)} \end{aligned}$$

Sehingga : $(R_{(O,135)} \circ R_{(O,45)})(x, y) = R_{(O,180)}$

$$\begin{aligned} \text{Jadi } (R_{(O,135)} \circ R_{(O,45)})(-8, 4) &= (-8 \cdot \cos 180^\circ - 4 \cdot \sin 180^\circ, -8 \cdot \sin 180^\circ + 4 \cdot \cos 180^\circ) \\ &= (-8(-1) - 4(0), -8(0) + 4(-1)) \\ &= (8 - 0, 0 - 4) \\ &= (8, -4) \end{aligned}$$

09. Tentukanlah bayangan titik (12, -8) oleh rotasi dengan pusat O(0, 0) dan sudut 120° dilanjutkan rotasi dengan pusat yang sama dengan sudut 150° .

10. Tentukanlah bayangan titik (6, -2) oleh refleksi terhadap sumbu X dilanjutkan rotasi dengan pusat O(0, 0) dan sudut 90° .

Jawab

$$\begin{aligned} (R_{(O,90)} \circ M_x)(6, -2) &= (R_{(O,90)} [M_x(6, -2)]) \\ &= R_{(O,90)} [(6, 2)] \\ &= (6 \cdot \cos 90^\circ - 2 \cdot \sin 90^\circ, 6 \cdot \sin 90^\circ + 2 \cdot \cos 90^\circ) \\ &= (6(0) - 2(1), 6(1) + 2(0)) \\ &= (-2, 6) \end{aligned}$$

Atau dengan matriks $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Jadi bayangannya (-2, 6)

11. Tentukanlah bayangan titik $(8, -4)$ oleh refleksi terhadap sumbu-Y dilanjutkan rotasi dengan pusat $O(0, 0)$ dan sudut 180° .

12. Tentukanlah hasil dari $[D_{(A,2)} \circ D_{(A,-3)}](-3, 5)$ jika pusat $A(2, -1)$

Jawab

$$\begin{aligned}[D_{(A,2)} \circ D_{(A,-3)}](-3, 5) &= D_{(A,2)} [D_{(A,-3)}(-3, 5)] \\&= D_{(A,2)} [(-3(-3-2) + 2, -3(5 - (-1) + (-1)))] \\&= D_{(A,2)} [(-3(-5) + 2, -3(6) - 1)] \\&= D_{(A,2)} [(17, -19)] \\&= (2(17 - 2) + 2, 2(-19 - (-1) + (-1))) \\&= (2(15) + 2, 2(-18) - 1) \\&= (32, -37)\end{aligned}$$

13. Tentukanlah hasil dari $[D_{(A,2)} \circ D_{(A,-3)}](3, -6)$ jika pusat $A(4, -2)$

Beberapa rumus khusus dalam komposisi transformasi adalah :

1. Jika $T_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ dan $T_2 = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ maka $(T_1 \circ T_2) = (T_2 \circ T_1) = \begin{bmatrix} a + p \\ b + q \end{bmatrix}$

2. $(D_{(0,c)} \circ D_{(0,k)}) = D_{(0,ck)}$

SOAL LATIHAN 02

B. Komposisi Transformasi

01. Jika $T_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ dan $T_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ maka koordinat bayangan dari komposisi $(T_2 \circ T_1)(-5, 4) =$
- A. $(-3, 4)$ B. $(2, -5)$ C. $(-2, 9)$
D. $(-2, -6)$ E. $(3, -6)$
02. Diketahui translasi $T_1 = \begin{bmatrix} a \\ -2 \end{bmatrix}$ dan $T_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ b \end{bmatrix}$. Jika titik bayangan dari $(T_1 \circ T_2)(4, -2)$ adalah $(6, 0)$, maka nilai $a - b = \dots$
- A. 10 B. 6 C. 3
D. -2 E. -5
03. Bayangan titik $A(8, -6)$ oleh suatu rotasi sejauh $(O, 150^\circ)$ dilanjutkan rotasi $(O, 30^\circ)$ adalah
- A. $(6, -4)$ B. $(-8, 6)$ C. $(5, 7)$
D. $(-4, 8)$ E. $(9, 3)$
04. Jika M_x menyatakan pencerminan terhadap sumbu X dan $M_{y=x}$ menyatakan pencerminan terhadap garis $y = x$ maka koordinat bayangan $(M_{y=x} \circ M_x)(3, -1) = \dots$
- A. $(-1, -3)$ B. $(1, 3)$ C. $(1, -3)$
D. $(-3, 1)$ E. $(-3, -1)$
05. Diketahui M_1 adalah pencerminan terhadap garis $x = 2$ dan M_2 adalah pencerminan terhadap garis $x = -3$, maka koordinat bayangan dari $(M_2 \circ M_1)(5, -1)$ adalah
- A. $(-5, -1)$ B. $(2, 6)$ C. $(2, -5)$
D. $(-1, -4)$ E. $(4, 2)$
06. Diketahui M_1 adalah pencerminan terhadap garis $y = h$ dan M_2 adalah pencerminan terhadap garis $y = 4$, Jika koordinat bayangan dari $(M_2 \circ M_1)(3, -1)$ adalah $(3, -5)$ maka nilai h adalah ...
- A. -5 B. -3 C. 3
D. 5 E. 6
07. Bayangan titik $P(-5/3, 2)$ jika dilatasi dengan skala 3 dan pusat $O(0, 0)$ dan dilanjutkan dengan rotasi setengah putaran dengan pusat $O(0, 0)$ adalah ...
- A. $(-6, -5)$ B. $(6, -5)$ C. $(-6, 5)$
D. $(5, -6)$ E. $(-3, 5)$

08. Bayangan titik A(2, -3) oleh dilatasi dengan pusat P(-3, 5) dan faktor skala 3 dan dilanjutkan dengan skala -2 pada pusat yang sama adalah
- A. (-33, 53) B. (-24, 8) C. (-12, 8)
D. (-30, 7) E. (10, -3)
09. Bayangan titik P(-3, 4) oleh dilatasi dengan skala 3 dan pusat A(-3, 3) dilanjutkan dilatasi dengan skala -2 dan pusat B(5, -1) adalah ...
- A. (10, -12) B. (18, -3) C. (21, -15)
D. (11, -15) E. (14, 6)
10. Diketahui $F_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ dan $F_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$. Bayangan titik P(5, 2) oleh tranformasi F_2 dilanjutkan dengan transformasi F_1 adalah
- A. P'(6, -3) B. P'(2, 7) C. P'(-3, 8)
D. P'(2, -4) E. P'(12, -6)
11. Sebuah titik A(x, y) dicerminkan terhadap garis x = 2 kemudian dicerminkan lagi terhadap garis x = -1 sehingga diperoleh titik bayangan A'(-8, -5). Titik A adalah ...
- A. (3, -5) B. (-3, -5) C. (-2, -5)
D. (2, -5) E. (6, -5)
12. Sebuah titik P(x, y) dicerminkan terhadap garis x = 3 dan dilanjutkan dilatasi dengan pusat (1, 2) dan skala 3 sehingga diperoleh bayangan P'(22, 11) Koordinat titik P adalah
- A. P(2, -4) B. P(3, -4) C. P(-2, 3)
D. P(-2, 5) E. P(1, -2)
13. Titik A(2, -5) didilatasi dengan pusat P(1, 3) dan skala -3 selanjutnya direfleksikan terhadap garis y = 4 sehingga diperoleh bayangan ...
- A. A'(-4, -19) B. A'(-2, -19) C. A'(-2, 19)
D. A'(-2, -27) E. A'(-2, 27)

TRANSFORMASI

C. Transformasi Pada Garis dan Kurva

Pada materi sebelumnya telah dijelaskan tentang transformasi pada titik. Selanjutnya akan diuraikan juga aturan transformasi pada garis dan kurva. Adapun langkah langkah menyelesaikan transformasi pada garis dan kurva adalah

1. Merumuskan pola transformasi yang menghubungkan titik asal dengan titik bayangan
2. Mensubstitusikan pola transformasi itu ke persamaan garis atau kurva
3. Menyelesaikan persamaan bayangannya

Untuk pemahaman lebih lanjut, ikutilah contoh soal berikut ini

01. Tentukanlah bayangan garis $4x - 5y = 3$ jika digeser sejauh $T = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$

Jawab

Menurut aturan translasi diperoleh : $x' = x + 2$ maka $x = x' - 2$

$$y' = y - 3 \quad \text{maka} \quad y = y' + 3$$

sehingga $4x - 5y = 3$

$$4(x' - 2) - 5(y' + 3) = 3$$

$$4x' - 8 - 5y' - 15 = 3$$

$$4x' - 5y' - 23 = 3$$

$$4x' - 5y' = 26$$

Jadi persamaan bayangannya : $4x - 5y = 26$

02. Tentukanlah bayangan garis $3x - 5y = 6$ jika digeser sejauh $T = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$

03. Tentukanlah bayangan garis $y = 3x - 7$ jika dicerminkan terhadap garis $y = -4$

Jawab

Menurut aturan pencerminan diperoleh : $x' = x$ maka $x = x'$

$$y' = 2(-4) - y$$

$$y' = -8 - y \quad \text{maka} \quad y = -8 - y'$$

sehingga $y = 3x - 7$

$$(-8 - y') = 3x' - 7$$

$$-y' = 3x' - 7 + 8$$

$$-y' = 3x' + 1$$

$$y' = -3x' - 1 \quad \text{Jadi persamaan bayangannya : } y = -3x - 1$$

04. Tentukanlah bayangan garis $y = 2x + 3$ jika dicerminkan terhadap garis $x = 5$

05. Jika sebuah parabola dilatasi dengan pusat $A(1, 2)$ dan skala 2 akan menghasilkan bayangan $y = x^2 - 2x + 7$. Tentukanlah persamaan parabola semula

Jawab

Menurut aturan dilatasi diperoleh : $x' = 2(x - 1) + 1$

$$x' = 2x - 2 + 1$$

$$x' = 2x - 1$$

$$y' = 2(y - 2) + 2$$

$$y' = 2y - 4 + 2$$

$$y' = 2y - 2$$

sehingga $y = x^2 - 2x + 7$

$$2y' - 2 = (2x' - 1)^2 - 2(2x' - 1) + 7$$

$$2y' - 2 = 4x'^2 - 4x' + 1 - 4x' + 2 + 7$$

$$2y' - 2 = 4x'^2 - 8x' + 10$$

$$2y' = 4x'^2 - 8x' + 12$$

$$y' = 2x'^2 - 4x' + 6$$

Jadi persamaan bayangannya : $y = 2x^2 - 4x + 6$

06. Jika sebuah parabola dilatasi dengan pusat $A(3, -1)$ dan skala 2 akan menghasilkan bayangan $y = x^2 + 5x - 6$. Tentukanlah persamaan parabola semula

07. Tentukanlah bayangan lingkaran $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$ jika dilatasi dengan pusat $O(0, 0)$ dan skala 2. Tentukanlah pula pusat dan jari-jari lingkaran bayangan

Jawab

Menurut aturan dilatasi diperoleh : $x' = 2x$ maka $x = \frac{1}{2}x'$

$$y' = 2y \quad \text{maka} \quad y = \frac{1}{2}y'$$

sehingga $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$

$$\left[\frac{x'}{2}\right]^2 + \left[\frac{y'}{2}\right]^2 - 6\left[\frac{x'}{2}\right] + 4\left[\frac{y'}{2}\right] + 4 = 0$$

$$\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{4} - 3x' + 2y' + 4 = 0$$

$$x'^2 + y'^2 - 12x' + 8y' + 16 = 0$$

Jadi persamaan bayangannya : $x^2 + y^2 - 12x + 8y + 16 = 0$

Pusat $P(x_p, y_p)$ dimana $x_p = -\frac{1}{2}A = -\frac{1}{2}(-12) = 6$

$$y_p = -\frac{1}{2}B = -\frac{1}{2}(8) = -4 \quad \text{Jadi } P(6, -4)$$

Bandingkan dengan pusat lingkaran asal $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$, yakni

$$P(-\frac{1}{2}(-6) - \frac{1}{2}(4)) \text{ atau } P(3, -2)$$

$$\text{Jari-jari : } r = \sqrt{\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C}$$

$$r = \sqrt{\frac{(-12)^2}{4} + \frac{8^2}{4} - 16}$$

$$r = \sqrt{\frac{144}{4} + \frac{64}{4} - 16}$$

$$r = \sqrt{36 + 16 - 16}$$

$$r = 6$$

Bandingkan dengan pusat lingkaran asal $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$, yakni

$$\text{Jari-jari : } r = \sqrt{\frac{(-6)^2}{4} + \frac{4^2}{4} - 4}$$

$$r = \sqrt{\frac{36}{4} + \frac{16}{4} - 4}$$

$$r = \sqrt{9 + 4 - 4}$$

$$r = 3$$

08. Tentukanlah bayangan lingkaran $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 5 = 0$ jika dilatasi dengan pusat $O(0, 0)$ dan skala 3. Tentukanlah pula pusat dan jari-jari lingkaran bayangan

09. Tentukanlah bayangan fungsi $y = x^2 - 5x + 4$ jika dirotasikan sejauh 270° dengan pusat $O(0, 0)$ dilanjutkan pencerminan terhadap garis $y = -x$

Jawab

$$\text{Menurut aturan dilatasi diperoleh : } \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 270^\circ & -\sin 270^\circ \\ \sin 270^\circ & \cos 270^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

$$\text{Jadi } \begin{matrix} x' = x & \text{atau} & x = x' \\ y' = -y & \text{atau} & y = -x' \end{matrix}$$

$$\begin{aligned}\text{sehingga } y &= x^2 - 5x + 4 \\ -y' &= x'^2 - 5x' + 4 \\ y' &= -x'^2 + 5x' - 4\end{aligned}$$

10. Tentukanlah bayangan garis $2x - y = 5$ oleh transformasi matriks $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$

Jawab

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{(2)(3) - (1)(7)} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$(-1) \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 7 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3x' + y' \\ 7x' - 2y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\text{Maka } x = -3x' + y'$$

$$y = 7x' - 2y'$$

$$\text{sehingga : } 2x - y = 5$$

$$2(-3x' + y') - (7x' - 2y') = 5$$

$$-6x' + 2y' - 7x' + 2y' = 5$$

$$-13x' + 4y' = 5$$

$$13x' - 4y' = -5 \quad \text{Jadi bayangannya } 13x - 4y = -5$$

11. Tentukanlah bayangan garis $2x - 4y = 3$ jika diputar dengan pusat $O(0, 0)$ sejauh 45°

Jawab

SOAL LATIHAN 03

C. Transformasi Pada Garis dan Kurva

01. Bayangan garis $3x + 2y = 5$ oleh translasi sejauh $T = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$ adalah ...
- A. $3x + 2y = 8$ B. $3x + 2y = 6$ C. $3x + 2y = 7$
D. $2x + 3y = 7$ E. $2x + 3y = 6$
02. Persamaan bayangan garis $4x - 5y = 3$ oleh perputaran terhadap $O(0, 0)$ sejauh 90° adalah
- A. $-5x - 4y = 3$ B. $-4x - 5y = 3$ C. $5x - 4y = 3$
D. $4x + 5y = 3$ E. $5x + 4y = 3$
03. Persamaan bayangan garis $y = 2x + 6$ oleh dilatasi dengan skala -2 dan pusat $O(0, 0)$ adalah....
- A. $y = 4x + 12$ B. $y = 2x - 12$ C. $y = 4x - 12$
D. $y = 2x + 12$ E. $y = x + 3$
04. Persamaan bayangan garis $2x + 4y = 3$ oleh pencerminan terhadap garis $x = 3$ adalah
- A. $x + 2y = 5$ B. $4x + 2y = 6$ C. $2x + 4y = 3$
D. $4x - 2y = 7$ E. $2x - 4y = 9$
05. Sebuah lingkaran $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 11 = 0$ didilatasi dengan pusat $O(0, 0)$ dan skala 4. Koordinat pusat dan jari-jari bayangannya adalah ...
- A. Pusat $P(4, -2)$ dan jari-jari 4 B. Pusat $P(16, -8)$ dan jari-jari 12
C. Pusat $P(4, -3)$ dan jari-jari 4 D. Pusat $P(-16, 8)$ dan jari-jari 12
E. Pusat $P(-4, 3)$ dan jari-jari 4
06. Sebuah lingkaran yang ditransformasikan dengan matriks $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ menghasilkan bayangan lingkaran $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$. Persamaan lingkaran semula adalah ...
- A. $9x^2 + 9y^2 - 6x - 12y + 1 = 0$ B. $3x^2 + 3y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$
C. $x^2 + y^2 - x - 2y + 5 = 0$ D. $9x^2 + 9y^2 - 5x + 6y + 3 = 0$
E. $3x^2 + 3y^2 + 6x - 3y + 2 = 0$
07. Persamaan bayangan garis $x + y + 2 = 0$ oleh rotasi sejauh $\frac{1}{4}\pi$ radian terhadap $O(0, 0)$ dilanjutkan dilatasi dengan pusat $O(0, 0)$ dan faktor skala $2\sqrt{2}$ adalah
- A. $2x + y = 4$ B. $x = -4$ C. $y = -4$
D. $2x - y = 4$ E. $x + y = 4$

08. Bayangan garis $2x - 3y + 7 = 0$ oleh transformasi $(x, y) \longrightarrow (x', y')$ dimana $x' = 5x + 6y$ dan $y' = 4x + 5y$ adalah ...
- A. $13x - 12y + 30 = 0$ B. $21x - 3y + 14 = 0$
 C. $8x + 14y - 15 = 0$ D. $11x - 18y - 8 = 0$
 E. $22x - 27y + 7 = 0$
09. Bayangan garis $3x + 4y - 2 = 0$ oleh transformasi $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ adalah
- A. $2x + 3y = 2$ B. $2x - 3y = 2$ C. $3x + 2y = 3$
 D. $3x - 2y = -2$ E. $x + 2y = -4$
10. Persamaan bayangan lingkaran $x^2 + y^2 = 9$ jika dicerminkan oleh garis $y = -x$ dilanjutkan dengan pencerminan terhadap garis $x = 2$ adalah...
- A. $x^2 + y^2 = 18$ B. $x^2 + y^2 - 8y - 7 = 0$
 C. $x^2 + y^2 - 8y + 7 = 0$ D. $x^2 + y^2 - 10y - 8 = 0$
 E. $x^2 + y^2 - 8y - 10 = 0$
11. Garis $2x + y + 4 = 0$ adalah bayangan suatu garis yang dicerminkan terhadap garis $y = x$ dan dilanjutkan rotasi berpusat di $O(0, 0)$ sejauh 270° berlawanan arah jarum jam. Persamaan garis semula adalah ...
- A. $2x - y - 4 = 0$ B. $2x - y + 4 = 0$ C. $2x + y - 4 = 0$
 D. $x - 2y + 4 = 0$ E. $x - 2y - 4 = 0$
12. Persamaan bayangan garis $2y - 5x - 10 = 0$ oleh rotasi $[O, 90^\circ]$ dilanjutkan refleksi terhadap garis $y = -x$ adalah ...
- A. $5x + 2y + 10 = 0$ B. $5y - 2x - 10 = 0$ C. $2y + 5x + 10 = 0$
 D. $2y + 5x - 10 = 0$ E. $2y - 5x + 10 = 0$
13. Persamaan bayangan garis $5x - 3y = 2$ oleh refleksi terhadap garis $x = 1$ dan dilanjutkan rotasi 180° terhadap pusat $O(0, 0)$ adalah ...
- A. $5x - 3y = 12$ B. $5x + 3y = -6$ C. $5x + 3y = -8$
 D. $5x + 3y = 12$ E. $5x - 3y = 8$
14. Bayangan garis $3x + 4y = 2$ oleh transformasi dengan matriks $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ adalah ...
- A. $2x + 3y = 2$ B. $2x - 3y = 2$ C. $3x + 2y = 3$
 D. $3x - 2y = -2$ E. $x + 2y = -4$
15. Garis dengan persamaan $2x - y = 6$ karena pencerminan terhadap garis $y = x$ dilanjutkan transformasi sesuai dengan matriks $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Persamaan bayangannya adalah ...
- A. $5x + 2y + 6 = 0$ B. $2x + 2y - 6 = 0$ C. $2x + 3y - 6 = 0$
 D. $2x + 5y - 6 = 0$ E. $2x + 6y + 6 = 0$

16. Persamaan bayangan garis $2x + 3y = -1$ karena refleksi terhadap sumbu-Y dilanjutkan dengan rotasi berpusat O sebesar $\frac{\pi}{2}$ adalah ...
- A. $2x - 3y - 1 = 0$ B. $2x + 3y - 1 = 0$ C. $3x + 2y + 1 = 0$
D. $3x - 2y - 1 = 0$ E. $3x + 2y - 1 = 0$
17. Persamaan bayangan parabola $y = x^2 - 3$ karena refleksi terhadap sumbu-X dilanjutkan oleh transformasi yang bersesuaian dengan matriks $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ adalah ...
- A. $y^2 + x^2 - 2xy - x + 2y - 3 = 0$ B. $y^2 + x^2 + 2xy + x - 2y - 3 = 0$
C. $y^2 + x^2 - 2xy + x - 2y - 3 = 0$ D. $y^2 + x^2 + 2xy + x + 2y - 3 = 0$
E. $y^2 - x^2 + 2xy + x + 2y - 3 = 0$
18. Persamaan bayangan garis $y = 3x + 2$ oleh transformasi yang bersesuaian dengan matriks $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dilanjutkan dengan rotasi pusat O(0, 0) sebesar 90° adalah ...
- A. $y = -\frac{7}{3}x - \frac{2}{3}$ B. $y = -\frac{7}{3}x + \frac{2}{3}$ C. $y = \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}$
D. $y = -\frac{3}{7}x + \frac{2}{3}$ E. $y = \frac{3}{7}x + \frac{2}{3}$
19. Persamaan bayangan kurva $y = 3x^2 + 2x - 1$ oleh pencerminan terhadap sumbu-x dilanjutkan pencerminan terhadap sumbu-y adalah ...
- A. $y = -3x^2 - 2x - 1$ B. $y = -3x^2 + 2x + 1$ C. $y = -3x^2 + 2x - 1$
D. $y = 3x^2 + 2x + 1$ E. $y = 3x^2 - 2x + 1$